Statistik IV

Teil 1: Fortsetzung Wahrscheinlichkeitsrechnung

Prof. Dr. Helmut Küchenhoff
kuechenhoff@stat.uni-muenchen.de

Institut für Statistik
Ludwig-Maximilians-Universität München

Sommersemester 2007

8.1 Bedingte Verteilung bei diskreter ZG X

Seien $Y : \Omega \to \mathbb{R}, X : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Die **bedingte Verteilung** von Y gegeben X ist gegeben durch

$$F_{Y|X}(y|x) = P(Y \leq y|X = x) = \frac{P(Y \leq y, X = x)}{P(x = x)}$$

Die Verteilungsfunktion ist eine Funktion von zwei Variablen

$$F_{Y|X} : \mathbb{R}^2 \to [0; 1]$$

Die bedingte Verteilung wird interpretiert als die Verteilung von Y bei gegebenem X. Berücksichtigt man gleichzeitig, dass X eine Zufallsgröße ist, erhält man eine "zufällige" Verteilungsfunktion.

Bedingte Verteilung entspricht bedingter Wahrscheinlichkeit

Seien $Y : \Omega \to \mathbb{R}, X : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. X diskret
Dann gilt für alle x mit $P(X = x) \neq 0$:

$$P_{Y|X}(B|x) = \underbrace{P(Y \in B|X = x)}_{\text{bedingteWahrscheinlichkeit}}$$

Beachte: Die Bedingte Verteilung wird häufig zur Definition von gemeinsamen Verteilungen benutzt.

8.2 Bedingte Erwartung bei diskreter ZG X

Seien $Y : \Omega \to \mathbb{R}, X : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. X diskret
Die **bedingte Erwartung** von Y gegeben X ist gegeben durch

$$E[Y|X = x] = \int y dF_{Y|X=x}$$

Wir setzen zusätzlich

$$E[Y|X = x] = 0 \text{ für } P(X = x) = 0$$

Die bedingte Erwartung ist eine Funktion von X und damit selbst eine Zufallsgröße.

Satz 8.3 Satz vom iterierten Erwartungswert (diskret)

Seien $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $Y \in L^1$. Dann gilt:

$$E[E(Y|X)] = E(Y).$$

Beweisidee:

$$\sum_x \left[\int y \;\; dF_{Y|X=x}\right] P(X=x) = \sum_x \int y \;\; d\,\frac{P(Y \leq y, X=x)}{P(X=x)} P(X=x)$$

$$= \sum_x \int y \;\; dP(Y \leq y, X=x) = \int y \, \sum_x dP(Y \leq y, X=x)$$

$$= \int y \;\; dP(Y \leq y) = E(Y)$$

Beispiele

1. Berechnung des Mittelwertes aus gruppierten Daten
2. $X \sim B(1, p)$, Für X=0 sei Y=0; Für X=1 sei $X \sim Exp(\lambda)$
   Teil wird mit W'keit 1-p defekt angeliefert, mit W'keit p funktioniert es.
   Y ist die Lebensdauer.
   $E(Y|X=0) = 0; E(Y|X=1) = 1/\lambda$ Die bedingte Erwartung ist eine diskrete ZG mit den beiden Ausprägungen 0 und $1/\lambda$.

   $$E[E[Y|X]] = (1-p) * 0 + p * 1/\lambda$$

3. Auftreten einer Krankheit $N \sim Po(\lambda)$. In der Erhebung $K|N \sim B(N, p)$

$$\begin{aligned} E(K|N) &= Np \\ E(K) &= \lambda p \\ E(N|K) &= K + (1-p)\lambda \end{aligned}$$

Def. 8.4 Bedingte Dichte

Seien $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P), X \in L^1$.
Die 2-dimensionale Zufallsgröße (Y, X) sei absolutstetig mit Dichte f. Dann ist die **bedingte Dichte** $f_{Y|X} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ wie folgt definiert:

$$f_{Y|X}(y|x) := \begin{cases} \dfrac{f(x,y)}{\int f(x,z)dz} = \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)} & \text{für } f_X(x) \neq 0 \\ 0 & \text{für } f_X(x) = 0. \end{cases}$$

Aus der bedingten Dichte lässt sich die bedingte Verteilung direkt ableiten.

Satz 8.5 Satz vom iterierten Erwartungswert (stetig)

Seien $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $Y \in L^1$. Dann gilt:

$$E[E(Y|X)] = E(Y).$$

Beweisidee:

$$\int \left[\int y \;\; f_{Y|X=x} dy \right] f(x)dx = \int_x \int y \;\; \frac{f(x,y)}{f(x)} f(x)dydx$$

$$\int y \;\; \int_x f(x,y)dxdy$$

$$= \int y \;\; f(y)dy = E(Y)$$

Satz 8.6 Elementare Eigenschaften der bedingten Erwartung

Seien $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $Y \in L^1$.

a) $Y \equiv C \Longrightarrow E(Y|X) \equiv C$

b) X, Y unabhängig $\Longrightarrow E(Y|X) = E(Y)$

c) $Y = h(X) \Longrightarrow E(Y|X) = h(X)$

d) $E(h(X)Y|X) = h(X)E(Y|X)$ „pull through property"

Satz 8.7 Bedingte Varianz

Seien $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $Y \in \mathbf{L^2}$.
Die **bedingte Varianz** ist gegeben durch

$$V(Y|X) := E[(Y - E(Y|X))^2|X]$$

$$V(Y|X = x) = E[(Y - E(Y|X = x))^2|X = x]$$

Satz 8.8 Verschiebungssatz und Zerlegungssatz

Seien $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $Y \in \mathbf{L^2}$.

1. $V(Y|X) = E(Y^2|X) - [E(Y|X)]^2$
2. $V(Y) = E[V(Y|X)] + V[E(Y|X)]$

Beispiel: Varianzberechnung bei gruppierten Daten (ANOVA)

X diskrete Variable, die die Gruppenzugehörigkeit bezeichne.

$$V(Y) = E[V(Y|X)] + V[E(Y|X)]$$

$$= \sum_k P(X = k)V(Y|X = k) + \sum_k P(X = k)E[(Y|X = k) - E(Y)]^2$$

Gesamtvarianz = Varianz innerhalb der Gruppen + Varianz zwischen den Gruppen.
Man betrachtet das Zufallsexperiment: Ziehen eines Elements aus der Grundgesamtheit mit gleichen W'keiten 1/N Die bekannten Formeln erhält man durch $P(X = k) = \frac{N_k}{N}$

Beispiel: Diskrete Mischung von Normalverteilungen

X diskret

$$\begin{aligned} X &\sim B(1,p) \\ Y|X &\sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \end{aligned}$$

Dichte von Y :

$$f_Y((y) = (1-p)\frac{1}{\sigma_0}\phi\left(\frac{y-\mu_0}{\sigma_0}\right) + p\frac{1}{\sigma_1}\phi\left(\frac{y-\mu_1}{\sigma_1}\right)$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= E[E[Y|X]] = (1-p)\mu_0 + p\mu_1 \\ V(Y) &= E[V(Y|X)] + V[E(Y|X)] = (1-p)\sigma_0^2 + p\sigma_1^2 + (1-p)p(\mu_0-\mu_1)^2 \end{aligned}$$

Satz 8.9 Bedingte Verteilungen bei der zweidimensionalen Normalverteilung

Seien (X, Y) gemeinsam normalverteilt mit Dichte

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\sum)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-\mu_X \\ y-\mu_Y \end{pmatrix}' \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} x-\mu_X \\ y-\mu_Y \end{pmatrix}\right\}$$

mit

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

$$\begin{array}{ccc} X & \sim & N(\mu_X, \sigma_X^2) \\ Y & \sim & N(\mu_Y, \sigma_Y^2) \\ \underbrace{[Y|X]}_{\text{bedingteVerteilung}} & \sim & N(\mu_{Y|X}, \sigma^2_{Y|X}) \end{array}$$

mit:

$$\begin{array}{ccccc} \mu_{Y|X} & = & E(Y|X) & = & \mu_Y + \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}(X - \mu_X) \\ \sigma^2_{Y|X} & = & V(Y|X) & = & \sigma_Y^2 - \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_X^2} \end{array}$$

Regression (X Normalverteilt)

Seien $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ und $[Y|X] \sim N(\mathit{beta}_0 + \beta_1 X, \sigma^2)$ Dann ist

$$(Y, X) \sim N\left[\left[\begin{array}{c} \mu_X \\ \beta_0 + \beta_1 X \end{array}\right], \left(\begin{array}{cc} \sigma_X^2 & \beta_1 \sigma_X^2 \\ \beta_1 \sigma_X^2 & \sigma_X^2 \beta_1^2 + \sigma^2 \end{array}\right)\right]$$

$$[X|Y] \sim N(\mu_X + \frac{\beta_1 \sigma_X^2}{\sigma_X^2 \beta_1^2 + \sigma^2}(Y - (\beta_0 + \beta_1 \mu_X)), \sigma_X^2 - \frac{\beta_1 \sigma_X^2}{\sigma_X^2 \beta_1^2 + \sigma^2}$$

Def 8.10 Beta Binomial Verteilung

Diese Verteilung wird zur Modellierung von Overdisperson benutzt.
Grundidee: $Y \sim B(n, x)$, aber X nicht fest sondern zufällig, z.B. X genügt Beta-Verteilung.

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \\ B(\alpha,\beta) &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \quad \text{Beta-Funktion} \\ E(X) &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ V(X) &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2} \end{aligned}$$

Beta Binomial Verteilung (2)

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= E[E(Y|X)] = E[nX] = n\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\
V(Y) &= E[V[Y|X]] + V[E(Y|X)] = E[nX * (1-X)] + V[nX] \\
&= nE(X)(1-E(X))\frac{\alpha+\beta+n}{\alpha+\beta+1}
\end{aligned}
$$

Der Faktor

$$\frac{\alpha+\beta+n}{\alpha+\beta+1}$$

beschreibt die Overdispersion.

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Beta Binomial Verteilung ist:

$$P(Y=k) \int_0^1 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$$

Satz 8.11 Satz von Bayes für Dichte

Seien $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und (Y, X) haben gemeinsame Dichte f. Dann gilt:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y)}{f_X(x)} \tag{1.1}$$

$$= \frac{f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y)}{\int f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y) dy} \tag{1.2}$$

Alternative allgemeine Definition der bedingten Erwartung

Seien $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $Y \in L^1$.
Die **bedingte Erwartung** von Y gegeben X ist eine Zufallsgröße

$$E(Y|X) : \Omega \to \mathbb{R}$$

mit

(1) $E(Y|X) = h(X) = h \circ X$ für eine Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

(2) Für alle $A \in \sigma(X)$ gilt:

$$E[E(Y|X) \cdot I_A] = E(Y \cdot I_A),$$

also

$$\int_A E(Y|X) dP = \int_A Y dP.$$

Schreibweise: $E(Y|X = x) := h(x)$.

9.1 Binomialverteilung:

$\mathbf{X} \sim \mathbf{B}(\mathbf{n}, \mathbf{p})$

1. **Modell:** X ist die Anzahl der Erfolge bei n-maliger unabhängiger Durchführung eines binären Zufallsexperiments mit Erfolgswahrscheinlichkeit p.

2. **Wahrscheinlichkeitsfunktion und Momente**

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} I_{\{0,1,\ldots,n\}}(x) \\ E(X) &= np \\ V(X) &= np(1-p) \end{aligned}$$

3. **Wahrscheinlichkeitserzeugende und char. Funktion**

$$\begin{aligned} g_X(t) &= (1 - p + pt)^n \\ \varphi_X(t) &= (1 + p(\exp(it) - 1))^n \end{aligned}$$

4. **Summeneigenschaft**
   $X_1 \sim B(n_1, p), X_2 \sim B(n_2, p), X_1$ und X_2 unabhängig
   $\Longrightarrow X_1 + X_2 \sim B(n_1 + n_2, p)$

Def. 9.2 Hypergeometrische Verteilung: $\mathbf{X} \sim \mathbf{H}(\mathbf{N}, \mathbf{K}, \mathbf{n})$

1. **Modell:** X ist die Anzahl der schwarzen Kugeln bei n-maligem Ziehen ohne Zurücklegen aus einer Urne mit N Kugeln, von den K schwarz sind.
2. **Wahrscheinlichkeitsfunktion und Momente**

$$
\begin{aligned}
P(X = x) &= \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} \cdot I_{\{0,\dots,K\}}(x) \cdot I_{\{0,\dots,N-K\}}(n-x) \\
E(X) &= n \cdot \frac{K}{N} \\
V(X) &= \underbrace{n \cdot \frac{K}{N}\left(1 - \frac{K}{N}\right)}_{\text{analog} \, B(n, \frac{K}{N})} \cdot \underbrace{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}_{\text{"Endlichkeitskorrektur"}}
\end{aligned}
$$

Def. 9.3 Poisson-Verteilung: $\mathbf{X} \sim \mathbf{Po}(\lambda)$

1. **Modell:** X ist die Anzahl der Ereignisse in einem bestimmten Zeitraum (1 Zeiteinheit). Dabei sind die Zeiten zwischen 2 Ereignissen unabhängig exponentialverteilt mit Parameter λ.

2. **Wahrscheinlichkeitsfunktion und Momente**

$$\begin{aligned} P(X = x) &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} I_{\mathbb{N}_0}(x) \\ E(X) &= \lambda \\ V(X) &= \lambda \end{aligned}$$

3. **Wahrscheinlichkeitserzeugende und char. Funktion**

$$\begin{aligned} g_X(t) &= \exp(\lambda(t-1)) \\ \varphi_X(t) &= \exp(\lambda[\exp(it)-1]) \end{aligned}$$

4. **Summeneigenschaft**
$X_1 \sim P_0(\lambda_1), X_2 \sim P_0(\lambda_2), X_1$ und X_2 unabhängig
$\Longrightarrow X_1 + X_2 \sim P_0(\lambda_1 + \lambda_2)$

Def. 9.4 Geometrische Verteilung und Negative Binomialverteilung: $\mathbf{X \sim G(p), X \sim NB(k,p)}$

1. **Modell:** X ist die Zahl der Fehlversuche bis zum k-ten Erfolg bei unabhängigen binären Zufallsexperimenten und Erfolgswahrscheinlichkeit p. Die Geometrische Verteilung ist der Sonderfall $k = 1$.
2. **Wahrscheinlichkeitsfunktion und Momente**

$$
\begin{aligned}
P(X = x) &= \binom{k+x-1}{x} p^k (1-p)^x \cdot I_{\mathbb{N}_0} \\
P(X = x) &= p(1-p)^x \quad \text{für} \quad x \sim G(p) \\
E(X) &= \frac{k(1-p)}{p} \\
V(X) &= \frac{k(1-p)}{p^2}
\end{aligned}
$$

3. **Wahrscheinlichkeitserzeugende und char. Funktion**

$$
\begin{aligned}
g_X(t) &= (1-(1-p)t)^{-k} \\
\varphi_X(t) &= p^k[1-(1-p)\exp(it)]^{-k}
\end{aligned}
$$

Def. 9.5 Stetige Gleichverteilung (Rechtecksverteilung): $\mathbf{X \sim G([a, b])}$

1. **Modell:** X ist ein Punkt im Intervall $[a, b]$. Dabei besitzt X eine konstante Dichte auf $[a, b]$, d.h. die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis $X \in B, B \subseteq [a, b]$, hängt nur von dem Maß $\lambda(B)$ ab.
2. **Dichte, Verteilungsfunktion und Momente**

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{1}{b-a} \cdot I_{[a,b]}(x) \\
F_X(x) &= \frac{1}{b-a}(x-a) \cdot I_{[a,b]}(x) + I_{(b,\infty)}(x) \\
E(X) &= \frac{a+b}{2} \\
V(X) &= \frac{(b-a)^2}{12}
\end{aligned}
$$

3. **Charakteristische Funktion**

$$\varphi_X(t) = (\exp(ibt) - \exp(iat))/it(b-a)$$

Def. 9.6 Normalverteilung: $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$

1. **Modell:** Mit der Normalverteilung werden sehr viele empirische Phäno/-mene modelliert. Dazu gehören (physikalische) Meßfehler, Körpergröße etc. Insbesondere ist die Normalverteilung als Modell geeignet, wenn X als Summe von unabhängigen Zufallsgrößen mit existierenden Momenten betrachtet werden kann.
2. **Dichte, Verteilungsfunktion und Momente**

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \\
\text{mit}: \varphi(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \\
F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt &= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \\
E(X) &= \mu \\
V(X) &= \sigma^2 \\
E(X-\mu)^4 &= 3\sigma^4
\end{aligned}
$$

Normalverteilung(2)

Charakteristische Funktion

$$\varphi_X(t) = \exp\left(i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$$

Summeneigenschaft

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

$$X_1, X_2 \text{unabhängig} \Longrightarrow X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Def. 9.7 Die Lognormalverteilung: $\mathbf{X} \sim \mathbf{LN}(\mu, \sigma^2)$

1. **Modell:** Ist $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, so ist $\exp(Y) = X \sim LN(\mu, \sigma^2)$. Der Logarithmus von X ist also normalverteilt.
2. **Dichte, Momente**

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right) \\
E(X) &= \exp(\mu) \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2 \right) \\
V(X) &= (\exp(\mu))^2 \cdot \exp(\sigma^2)(\exp(\sigma^2) - 1)
\end{aligned}
$$

Def. 9.8 Die Chiquadratverteilung: $\mathbf{X} \sim \chi^2(\mathbf{n})$

1. **Modell:** Sind $X_i, i = 1, \ldots n$ unabhängig und $X_i \sim N(0,1)$ so ist $\Sigma_{i=1}^{n} X^2; \sim \chi^2(n)$. Mit n wird die "Zahl der Freiheitsgrade" bezeichnet.
2. **Dichte und Momente**
   $f_x(x) = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \frac{1}{\sqrt{2^n}} e^{-x/2} x^{n/2-1}$
   $E(X) = n$
   $V(X) = 2n$
3. **Charakteristische Funktion**
   $\varphi_X(t) = \left(\frac{1}{2(\frac{1}{2} - it)}\right)^{n/2}$
4. **Summeneigenschaft**
   $X_1 \sim \chi^2(n_1) X_2 \sim \chi^2(n_2)$; X_1 und X_2 unabhängig
   $\Longrightarrow X_1 + X_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$

Def. 9.9 Die Cauchy-Verteilung: $\mathbf{X \sim C(a, b)}$

1. **Modell:** $Y \sim N(0,1), Z \sim N(0,1)$. Dann ist $X = \frac{Y}{Z}$ Standard-Cauchy-verteilt: $X \sim C(0,1)$.
   Die allgemeine $C(a,b)$-Verteilung erhält man durch lineare Transformation: $X \sim C(0,1) \to a + bX \sim C(a,b)$.
2. **Dichte und Verteilungsfunktion**

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad \text{für} X \sim C(0,1) \\
f_X(x) &= \frac{1}{\pi(1+(\frac{x-a}{b})^2)} \quad \text{für} X \sim C(a,b)
\end{aligned}
$$

   a ist der Median, b der Skalenparameter

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)$$

   Die *Momente* der Cauchy-Verteilung existieren *nicht*.
3. **Charakteristische Funktion**

$$\varphi_X(t) = \exp(iat - |t|b)$$

Cauchy-Verteilung(2)

4 **Summeneigenschaft**

$$X_1 \sim C(a_1, b_1), X_2 \sim C(a_2, b_2), X_1, X_2 \text{unabh.} \Longrightarrow X_1 + X_2 \sim C(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

Def. 9.10 Exponentialverteilung: $\mathbf{X} \sim \mathbf{Ex}(\lambda)$

1. **Modell:** X ist die Lebensdauer eines Objekts, das nicht altert.
2. **Dichte, Verteilungsfunktion und Momente**

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \lambda e^{-\lambda x} \\ F_X(x) &= 1 - e^{-\lambda x} \\ E(X) &= \frac{1}{\lambda} \\ V(X) &= \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

3. **Ausfall- oder Hazardrate:** $r(x) = \frac{f_X(x)}{1-F_X(x)}$ ist konstant gleich λ.
4. **Charakteristische Funktion**

$$\varphi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

Def. 9.11 Gamma-Verteilung: $\mathbf{X} \sim \Gamma(v, \lambda)$

1. **Modell:** Die Gamma-Verteilung ist eine sehr allgemeine Klasse von Verteilungen und enthält z.B. als wichtige Spezialfälle die χ^2-Verteilung, die Exponentialverteilung und die Erlangverteilung. Sie wird in vielen Zusammenhängen als Lebensdauerverteilung angewendet.
2. **Dichtefunktion und Momente**

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{1}{\Gamma(\upsilon)} \lambda^{\upsilon} x^{\upsilon-1} e^{-\lambda x} \cdot I_{(0,\infty)}(x) \quad \upsilon > 0, \lambda > 0 \\
E(X) &= \frac{\upsilon}{\lambda} \\
V(X) &= \frac{\upsilon}{\lambda^2}
\end{aligned}
$$

3. **Charakteristische Funktion**

$$\varphi_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^{\upsilon}$$

4. **Summeneigenschaft**
$X_1 \sim \Gamma(\upsilon_1, \lambda); X_2 \sim \Gamma(\upsilon_2, \lambda); X_1, X_2$ unabhängig
$\Longrightarrow X_1 + X_2 \sim \Gamma(\upsilon_1 + \upsilon_2, \lambda).$

Gammaverteilung: Spezialfälle:

$\upsilon = 1$: Exponentialverteilung
$\upsilon \in \mathbb{N}$: Erlang-Verteilung
$\lambda = \frac{1}{2}, \upsilon = \frac{c}{2}$: Chi-Quadrat-Verteilung ($\mathcal{X}_c^2$)

Def. 9.12 Laplace-Verteilung: $\mathbf{X \sim LP}$

1. **Modell:** $Y \sim \exp(1), Z \sim \exp(1), Y, Z$ unabhängig
$\Longrightarrow X := Z - Y \sim LP$
2. **Dichte, Momente**

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{1}{2} e^{-|x|} \\
E(X) &= 0 \\
V(X) &= 2
\end{aligned}
$$

3. **Charakteristische Funktion**

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

Def. 9.13 Weibullverteilung: $\mathbf{X} \sim \mathbf{Wb}(\mathbf{c}, \alpha)$

1. **Modell:** Verteilung für Bruchfestigkeit von Materialien. Die Verteilung ist auch durch ihre Hazardrate charakterisiert und wird daher auch als Lebensdauerverteilung benutzt. Die Verteilung kann aus der Exponentialverteilung wie folgt abgeleitet werden:

$$\begin{aligned} Y &\sim Ex(1) \\ X &= \alpha Y^{1/c} \\ X &\sim Wb(c, \alpha) \end{aligned}$$

2. **Dichte, Verteilungsfunktion und Momente**

$$\begin{aligned} f_X(x) &= cx^{c-1}/\alpha^c \cdot \exp\left(-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^c\right) \\ F_X(x) &= 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^c\right) \\ E(X) &= \alpha \cdot \Gamma\left(\frac{c+1}{c}\right) \\ V(X) &= \alpha^2 \left\{\Gamma\left(\frac{c+2}{c}\right) - \left[\Gamma\left(\frac{c+1}{c}\right)\right]^2\right\} \end{aligned}$$

Def. 9.14 Pareto-Verteilung: $\mathbf{X} \sim \mathbf{Pa(a, c)}$

1. **Modell:** "Paretos Gesetz" der Einkommensverteilung (aus der Form der Verteilungsfunktion)
2. **Dichte, Verteilungsfunktion und Momente**

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^c \quad \text{für } a \leq x < \infty \\
f_X(x) &= c \cdot a^c / x^{c+1} \cdot I_{(a,\infty)}(x) \\
E(X) &= ca/(c-1) \quad \text{für } c > 1 \\
V(X) &= ca^2/[(c-1)^2(c-2)] \quad \text{für } c > 2
\end{aligned}
$$

Andernfalls existieren $E(X)$ bzw. $V(X)$ *nicht*.

Def. 9.15 Beta-Verteilung: $\mathbf{X} \sim \mathbf{B}(\alpha, \beta)$

1. **Modell:** Verteilung auf dem Intervall $[0, 1]$, Anwendung in der Bayes-Analyse zur Modellierung des Parameters p der Binomialverteilung.
2. **Dichte, Momente**

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \\
B(\alpha, \beta) &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \quad \text{Beta-Funktion} \\
E(X) &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\
V(X) &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}
\end{aligned}
$$

Def. 9.16 Logistische Verteilung:

1. **Modell:** Wachstumskurve aus der Differentialgleichung
   $F'(x) = C * F(x)(1 - F(x))$
   Ähnlichkeit mit der Normalverteilung
2. **Dichte, Verteilungsfunktion, Momente**

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= \left(1 + \exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\right)^{-1} \\
f_x(x) &= \beta^{-1} \exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\left(1 + \exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\right)^{-2} \\
E(X) &= \alpha \\
V(X) &= \beta^2 * \pi^2/3
\end{aligned}
$$

Def. 9.17 Gumbel–(Extremwert–) Verteilung:

1. **Modell:** Verteilung von Maxima, $X = -\ln(Y)$, $Y \sim Ex(1)$
2. **Dichte, Verteilungsfunktion, Momente**

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \exp(-\exp(-(x-a)/b)) \\
f(x) &= b^{-1}\exp(-(x-a)/b) * \exp(-\exp(-(x-a)/b)) \\
E(X) &= a + C * b \\
C &= -\int_0^\infty \ln(y)\exp(-y)dy = 0.57722
\end{aligned}
$$