

Diese Lösung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Richtigkeit und dient lediglich als Orientierung zum Selbststudium. Es handelt sich NICHT um eine Musterlösung.

Aufgabe 1a)

$$\begin{aligned}
 E(x) &= \int_0^b 1 - b^{-\frac{1}{n-1}} x^{-\frac{1}{n-1}} dx \\
 &= b - b^{-\frac{1}{n-1}} \left[ \frac{1}{\frac{1}{n-1} + 1} \cdot x^{-\frac{1}{n-1} + 1} \right]_0^b \\
 &= b - b^{-\frac{1}{n-1}} \left[ \frac{n-1}{1+n-1} x^{\frac{n}{n-1}} \right]_0^b \\
 &= b - b^{-\frac{1}{n-1}} \left[ \frac{n-1}{n} \cdot b^{\frac{n}{n-1}} \right] \\
 &= b^{-\frac{n-1}{n}} \left[ \frac{n-1}{n} \right] b^{\frac{n}{n-1}} \\
 &= \frac{1}{n} b
 \end{aligned}$$

Aufgabe 1b) Nach Def.

$$L(x) = \frac{\tilde{E}(X)}{E(X)}$$

also

$$\begin{aligned}
 \tilde{E}(X) &= \int_0^x t \cdot \frac{1}{n-1} b^{-\frac{1}{n-1}} t^{\frac{2-n}{n-1}} dt \\
 &= \frac{1}{n-1} b^{-\frac{1}{n-1}} \int_0^x t^{\frac{2-n}{n-1} + 1} dt \\
 &= \frac{1}{n-1} b^{-\frac{1}{n-1}} \int_0^x t^{\frac{1}{n-1}} dt \\
 &= \frac{1}{n-1} b^{-\frac{1}{n-1}} \left[ \frac{n-1}{n} t^{\frac{2-n}{n-1}} \right]_0^x \\
 &= \frac{1}{n} b^{-\frac{1}{n-1}} x^{\frac{n}{n-1}}
 \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}L(X) &= \frac{\frac{1}{n}b^{-\frac{1}{n-1}}x^{\frac{n}{n-1}}}{\frac{1}{n}b} \\ &= b^{-\frac{1}{n-1}-1}x^{\frac{n}{n-1}} \\ &= b^{\frac{-1-n+1}{n-1}}x^{\frac{n}{n-1}}.\end{aligned}$$

Mithin gilt also

$$(F(x))^n = \left(b^{-\frac{1}{n-1}}x^{\frac{1}{n-1}}\right)^n = L(x)$$

und wegen  $F(x_\alpha) = \alpha$  gilt  $\alpha^n = L(\alpha)$  Alternativ:

$$L(\alpha) = \frac{\int_0^\alpha Q(t)dt}{E(X)} = \int_0^\alpha Q^*(t)dt$$

und

$$\begin{aligned}F(x_\alpha) = \alpha &= b^{-\frac{1}{n-1}}x_\alpha^{\frac{1}{n-1}} \\ \alpha^{n-1} &= b^{-1}x_\alpha \\ b\alpha^{n-1} &= x_\alpha = Q(\alpha) \\ \int_0^\alpha bt^{n-1}dt &= b\left[\frac{1}{n}t^n\right]_0^\alpha \\ &= b\frac{1}{n}\alpha^n \\ L(\alpha) &= \alpha^n\end{aligned}$$

und wegen  $F(x_\alpha) = \alpha$  gilt  $F(x_\alpha)^n = L(x_\alpha)$

Aufgabe 1c)

$$\begin{aligned}G &= 1 - 2 \int_0^1 \alpha^n d\alpha \\ &= 1 - 2 \left[ \frac{1}{n+1} \alpha^{\frac{n-1}{n+1}} \right]_0^1 \\ &= 1 - 2 \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-2}{n+1} \\ &= \frac{n-1}{n+1}\end{aligned}$$

Aufgabe 1d) Weil  $L(\alpha) = \alpha^n$  hängt die Form der Lorenzkurve nur von  $n$  ab

$$L(\alpha, n_1) = \alpha^{n_1}$$

$$L(\alpha, n_2) = \alpha^{n_2}$$

$\alpha^{n_1} \leq \alpha^{n_2}$ , wenn  $n_1 \geq n_2$ , da  $\alpha \in [0; 1]$ . Folglich gilt: Wenn  $X_1 \sim F(x, b_1, n_1)$  und  $X_2 \sim F(x, b_2, n_2)$ , dann ist  $X_1$  lorenzgrößer als  $X_2$  ( $X_1 \geq_L X_2$ ).  $L(X_1)$  liegt stets unterhalb von  $L(X_2)$