Aufgabe 1:

Eine Möglichkeit, die Verteilung der Likelihood-Quotienten-Statistik unter der Nullhypothese zu überprüfen, ist es, eine Simulation durchzuführen. Die Funktion `simulate.lme` überprüft diese Verteilung für zwei genestete Modelle:

(a) Betrachten Sie die `Orthodont`-Daten. Fitten Sie ein gemischtes Modell mit Zeittrend und zufälligem Intercept und ein gemischtes Modell mit zusätzlichem zufälligen subjektspezifischem Zeittrend. Testen Sie mit der Funktion `anova()` die Hypothese, dass der zufällige subjektspezifische Zeittrend nicht benötigt wird.

(b) Da sich die Nullhypothese auf dem Rand des Parameterraumes befindet, ist der LQ-Test konservativ. Stram und Lee (1994) empfehlen als approximative Verteilung der LQ-Statistik unter H_0 die Mischung aus zwei χ^2 -Verteilungen, hier $0.5\chi^2_1+0.5\chi^2_2$. Berechnen Sie im obigen Beispiel den daraus folgenden p-Wert und vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus Teil (a).

(c) Benutzen Sie die Funktion `simulate.lme()` um je 1000 Simulationen der beiden Modelle zu erstellen. Plotten Sie das resultierende Objekt und interpretieren Sie die Ergebnisse.

(d) Diskutieren Sie die Ergebnisse des folgenden Codes.
Hinweis: Die Verteilung des LR-Tests auf eine Varianzkomponente σ^2_b (d.h. $H_0 : \sigma^2_b = 0$), die unkorreliert mit den anderen zufälligen Effekten ist, kann durch die Mischung einer Punktmasse in 0 und der χ^2_1-Verteilung approximiert werden.

```
R>m0 <- lme(distance ~ Sex * I(age - 11), random = ~1 | Subject,
+     data = Orthodont)
R>m1 <- update(m0, random = ~I(age - 11) | Subject)
R>m2 <- update(m0, random = list(Subject = pdDiag(~I(age - 11))))
R>summary(m0)
R>summary(m1)
R>summary(m2)

R>(lr21 <- anova(m2, m1))
R>lr21.sim <- simulate.lme(m2, m2 = m1, nsim = n.sim)
R>print(plot(lr21.sim, df = c(1, 2)))
R>lrt21 <- 2 * (lr21.sim$alt$REML[, "logLik"] - lr21.sim$null$REML[,
+     "logLik"])
R>(p21.sim <- mean(lrt21 > lr21$L.Ratio[2]))
R>1 - pchisq(lr21$L.Ratio[2], df = 1)

R>(lr02 <- anova(m0, m2))
R>lr02.sim <- simulate.lme(m0, m2 = m2, nsim = n.sim)
R>print(plot(lr02.sim, df = c(0, 1)))
R>lrt02 <- 2 * (lr02.sim$alt$REML[, "logLik"] - lr02.sim$null$REML[,
+     "logLik"])
```

```
R>(p02.sim <- mean(lrt02 > lr02$L.Ratio[2]))
R>1 - 0.5 * pchisq(lr02$L.Ratio[2], df = 1) - 0.5
```

Aufgabe 2:

Betrachten Sie den folgenden Auschnitt aus der Zeitreihe `wertpap` der Zinsen deutscher Wertpapiere (zu lesen von links nach rechts).

```
7.51 7.42 6.76 5.89 5.95 5.35 5.51 6.13 6.45 6.51 6.92
6.95 6.77 6.86 6.95 6.66 6.26 6.18 6.07 6.52 6.52 6.71
```

(a) Erstellen Sie einen Plot der Zeitreihe in R.

(b) Bestimmen Sie den gleitenden 3er und 11er-Durchschnitt mit der Funktion `filter` und stellen Sie die Resultate graphisch dar.

(c) Anstelle gleitender Durchschnitte können zur Glättung einer Zeireihe auch gleitende Mediane verwendet werden, die analog zu den gleitenden Durchschnitten definiert sind. Berechnen Sie die entsprechenden 3er- und 11er Mediane und zeichnen Sie die Resultate.

Aufgabe 3:

Zur Glättung durch ein lokales Polynom soll ein Polynom $m(t) = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 t^2$ zweiten Grades an die fünf Werte $y_{t-2}, y_{t-1}, y_t, y_{t+1}, y_{t+2}$ angepasst werden. Die Glättung für y_t bei der lokalen polynomialen Regression ist dann $y_t = m(t)$.

(a) Zeigen Sie, dass für $t > 2$

$$\hat{y}_t = \frac{1}{35}(-3y_{t-2} + 12y_{t-1} + 17y_t + 12y_{t+1} - 3y_{t+2})$$

Hinweis: Zur Vereinfachung können die Zeitpunkte t neu durchnummeriert werden von -2 bis +2. Dann ist bei der Anpassung die Funktion

$$Q = \sum_{t=-2}^{2} (y_t - \beta_1 - \beta_2 t - \beta_3 t^2)^2$$

zu minimieren. Die Vorhersage $\hat{y}_0 = \hat{\beta}_1$ ist der gewünschte Wert.

(b) Schreiben Sie eine Funktion `fit.poly2(y)` in R die für einen Datenvektor $\boldsymbol{y}$ der Länge 5 mittels der Funktion `lm` ein Polynom $m(t)$ der Ordnung $p = 2$ und Zeitpunkten $t = (-2, -1, 0, 1, 2)$ an $\boldsymbol{y}$ anpasst. Die Funktion soll $\hat{y}_0 = m(0)$ zurückgeben. Benutzen Sie diese Funktion um eine lokale polynomiale Regression der gegebenen Daten durchzuführen und stellen Sie das Resultat graphisch dar. Vergleichen Sie das Resultat mit dem Resultat des äquivalenten entsprechenden GD-Filters.