Seminar:

Die Theorie der Fuzzy-Sets

-

Ihre Entwicklung und ihr Modellierungspotential in den Sozialwissenschaften

Vortrag: **Fuzzy-Sets in den Sozialwissenschaften: Einführende Texte**

LMU München, Sommersemester 2009

Christian Kluge München, den 29.06.2009

Fuzzy-Sets in den Sozialwissenschaften: Einführende Texte

Gliederung

Fuzzy-Sets in den Sozialwissenschaften: Einführende Texte

1 Einleitung

- Forscher der Sozialwissenschaften beobachten schon lange, dass Menschen, obgleich sie ihre Welt in Kategorien unterteilen, oft Kategorien mit undeutlichen Abgrenzungen und Zugehörigkeitsabstufungen benutzen.
  Dies betrifft auch viele in der Sozialwissenschaft selbst verwendeten Begriffe, wie Begriffe aus den Themen der Gesellschaft, des sozialen Handelns, sozialer Tatbestände und der Integration und Desintegration.
- Die Fuzzy-Mengentheorie ist eine Erweiterung der klassischen Mengenlehre, die ein mathematisches Gerüst zur Handhabung von Kategorien bereitstellt, das partielle Zugehörigkeit (oder Zugehörigkeit in Stufen) zulässt.
  - Um Fälle teilweise zu einer Menge gehören zu lassen, bietet die Fuzzy-Mengenlehre Verallgemeinerungen der Begriffe der Mengenlehre wie etwa den Schnitt und die Vereinigung.
    ⇒ kategoriale Begriffe werden in dimensionale Bereiche übertragen

---

Beispiel:
Nützlich ist die Verwendung von Fuzzylogik oft dann, wenn

→ keine mathematische Beschreibung eines Sachverhaltes oder Problems vorliegt, sondern nur eine verbale Beschreibung.

→ das vorhandene Wissen - wie fast immer - Lücken aufweist oder teilweise veraltet ist, bietet sich der Einsatz von Fuzzylogik an, um noch zu einer fundierten Aussage über einen aktuellen oder künftigen Systemzustand zu gelangen.

⇒ Gewinnung einer mathematischen Beschreibung mittels Fuzzylogik aus sprachlich formulierten Sätzen und Regeln, die in Rechnersystemen genutzt werden kann.

Interessant:
Sinnvolle Steuerung (bzw. Regelung) von Systemen durch Fuzzylogik, wenn ein mathematischer Zusammenhang zwischen den Ein- und Ausgabegrößen eines Systems nicht darstellbar ist - oder nur mit großem Aufwand erfolgen könnte, so dass eine Automatisierung zu teuer oder nicht in Echtzeit realisierbar würde.

Fünf Gründe für die Aufnahme der Fuzzy-Mengen in den Werkzeugkasten der Sozialwissenschaften:

- Sie sind imstande, mit Vagheit/Unschärfe systematisch umzugehen.

- Viele Konstrukte in den Sozialwissenschaften haben beides, sowohl kategorialen als auch dimensionalen Charakter. Gerade kategoriale Begriffe erweisen sich offensichtlich oft als eine Art von Stufen.
- Sie sind imstande, multivariate Beziehungen zwischen bedingten Mittelwerten und dem allgemeinen linearen Modell über Verallgemeinerungen der Mengenlehre-Operationen zu analysieren.
- Sie haben theoretische Genauigkeit. Die Theorien sind häufig in logischen oder Mengen-gemäßen Termen ausgedrückt, im Gegensatz zu den meisten statistischen Modellen für stetige Variablen.
- Die Fuzzy-Mengen-Theorie kombiniert mengen-artiges Denken mit stetigen Variablen auf eine strikte Weise.

1.1 Historisches

Platon (427-347 v. Chr.)

- Ursprung der Fuzzy-Logik (dt.: unscharfe Logik) in der alten griechischen Philosophie.
- Erweiterung der klassischen binären (= zweiwertige) Logik
- *Platon*'s Vermutung: Existenz eines dritten Bereichs zwischen **wahr** und **falsch;**

  → Das ist der antike Vorläufer des fuzzy-logischen Prinzips.

Aristoteles (384-322 v. Chr.)

- Postulierung des *Gesetzes vom ausgeschlossenen Dritten* von Platon's Schüler *Aristoteles*
- Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten: $A \cap A^C = \emptyset$.

  Dieses Gesetz bestimmte die Entwicklung logischer und mathematischer Systeme für die nächsten zwei Jahrtausende.

  Schnitte gehorchen in der Fuzzy-Mengelehre im Allgemeinen nicht dem Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten (law of the excluded middle). (später mehr)

Georg Hegel (1770-1831) und B. Russell (1872-1970)

- Wiederaufnahme Platon's Vermutung durch moderne Philosophen wie G. Hegel und B. Russell
- B. Russell (1923): "The law of excluded middle is true when precise symbols are employed, but it is not true when symbols are vague, as, in fact, all symbols are."

  (übersetzt: "Das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten ist wahr, wenn eindeutige Symbole zum Einsatz kommen. Aber es ist nicht wahr, wenn die Symbole vage/unscharf sind, wie faktisch alle Symbole sind.")
- B. Russell stellt die *Ungenauigkeit in der Sprache* (linguistische Probleme) an der Farbe Rot dar. Diese Farbe steht nicht für eine bestimmte, genau festgelegte Wellenlänge, sondern beschreibt einen Bereich im Spektrum aller Farben.

Beispiel für linguistisches Problem:

typische Anwendung:

→ Waschmaschinen werden so programmiert, dass sie je nach Verschmutzung der Wäsche ihre Waschmittelmenge regeln.

Ausgangspunkt: es ist nicht möglich, den Verschmutzungsgrad für Kleidung eindeutig zu bestimmen.

→ es gibt z.B. keine eindeutige Quantifizierung des *Verschmutzungsgrads* von *55 %*.

⇒ man benötigt hier eine Logik, die mit unscharfen Begriffen wie *leicht verschmutzt* oder *stark verdreckt* umgehen kann.

→ die Fuzzylogik *übersetzt* die Aussagen zur Wäscheverschmutzung in eine fest definierte Waschmittelmenge.

z.B.: *leicht verschmutzt* = 23 g Waschmittel, *stark verdreckt* = 65 g Waschmittel

→ Entscheidend: hinter dieser *Logik* ist keine einfache mathematische (lineare) Funktion zu finden, sondern es müssen die maßgebenden Werte (*23 g* oder *65 g*) aus Erfahrungen, Beobachtungen und empirischen Untersuchungen gewonnen werden.

J. Lukasiewicz (1878-1956)

- Zur selben Zeit Einführung einer ersten systematischen Alternative zu Aristoteles zweiwertiger Logik von *J. Lukasiewicz*
- J. Lukasiewicz zeigt, dass es Sätze gibt, denen keiner der Wahrheitswerte "wahr" oder "falsch" zugeordnet werden kann.

  ⇒ Existenz eines dritten Wahrheitswertes, den er zwischen "wahr (1)" und "falsch (0)" ansiedelt und "possible (1/2)" nennt.
- Später Entwickelung vier- und fünfwertiger Logiken
- Bezug zur Fuzzy-Set-Theorie (dt.: unscharfe Mengenlehre)

  → Möglichkeit, eine unendlichwertige Logik einzuführen.

  J. Lukasiewicz ließ dazu alle Zahlen aus dem Intervall [0,1] als Wahrheitswerte zu.

Lotfi Zadeh (geb. 1921)

- Wiederaufnahme der Idee von B. Russel durch *M. Black* 1937 und

  Vorstellung eines Verfahren, mit dem er die Unschärfe von Symbolen numerisch darstellen kann, *consistency-profile* genannt.

  Dabei erfolgt die Definition der Ungenauigkeit oder Vagheit eines Symbols unter Zuhilfenahme

dessen Komplements.
Vermutung, dass es mindestens ein Element gibt, das weder zum Symbol selbst, noch zu dessen Komplement vollständig gehört. Die Menge der Elemente, die nicht eindeutig zugeordnet werden können, nennt er *frings* (dt.: Fransen).
Z.B.: "Pünktlichkeit" kann schlecht und gut sein.

- 1965 Veröffentlichung des grundlegenden Artikels "Fuzzy Sets" durch *Lotfi Zadeh*, in dem er die Mathematik der Fuzzy-Set-Theorie beschreibt.
  Dort verbindet L. Zadeh die Idee M. Black's der "Fransen" mit der unendlichwertigen Logik J. Lukasiewicz's.

1.2 Heutige Anwendungsgebiete und Motivation

- Einsatz der Fuzzy-Logik in unterschiedlichen Bereichen:
  Automatisierungstechnik, Betriebswirtschaft, Medizintechnik, Unterhaltungselektronik, Fahrzeugtechnik, Regelungstechnik, künstliche Intelligenz, Spracherkennung, und andere Bereiche

1.2.1 Sozialwissenschaften

- Von Ragin (2000) als Möglichkeit befürwortet, "vielfalt-orientierte" Forschung und Stärkung der Verknüpfung zwischen Theorie und Datenanalyse.
  Eine erschienene spezielle Ausgabe der *Sociological Methods & Research* schloss Artikel von methodischen Aspekten der Fuzzy-Mengenlehre ebenso wie empirischer Anwendungen mit ein (Ragin & Pennings, 2005).

- dynamische Inferenzsysteme, um fremde Grundsatzentscheidungsfindung und organisatorische Handlungsweisen zu modellieren

- elementare Einführung zur Computermodellierungen bereitgestellt von Taber (1992), einige von diesen benutzen die Fuzzy-Argumentation

- Implementierung durch Computerprogramme (z.B.: DSIGoM gewerblich zu erwerben (Decision Systems Inc., 1998)
  - starke Verwendung des GoM-Models bei Gesundheitsuntersuchungen und in der Demographie, Systemen für regionale Planungen:
    Intention des (GoM = Grundsätze ordnungsgemäßer Modellierung) ist die Reduzierung bzw. Beherrschung der mit der Informationsmodellierung einhergehenden Komplexität

- in der wirtschaftswissenschaftlichen Literatur, insbesondere im Bereich der Operation Research Fuzzy-Entscheidungs- u. Optimierungsansätze

- Verwendung mehrstufiger Modelle von Goldstein, Rasbash, Browne, Woodhouse und Poulain (2000), um Fuzzy-Mengen zur Modellierung von Haushaltsdatenstrukturen zu entwickeln, insbesondere wo sich Haushaltszusammensetzungen im Laufe der Zeit verändern

1.2.2 andere Wissenschaften

- Informatik:
  - künstliche Intelligenz → Expertensysteme
    Teilgebiet der Informatik, das sich mit der Automatisierung intelligenten Verhaltens beschäftigt; Einfluss von Ergebnissen der Psychologie und Neurologie, Mathematik und Logik, Kommunikationswissenschaft, Philosophie und Linguistik
  - Kontrollsysteme (von der einfachen stationären Datenbankstruktur bis hin zu komplexen dynamischen Systemen),
    Fuzzy-Datenkomprimierungsverfahren (ursprünglich motiviert durch die Forschung an Strukturerkennung)
  - **Beispiel:** Regelung von U-Bahnen (z.B. in Japan/Sendai fährt U-Bahn seit 1987 vollautomatisch mit Fuzzy-Reglern), Prognose der zukünftigen Last in Routern bzw. Gateways oder Mobilfunk-Basisstationen

- Medizin:
  - Alarmsysteme für die Anästhesie, Neurologie,
  - Expertensystem MYCIN für die Diagnose bakteriogener Infektionskrankheiten, Verbesserungen und Erweiterungen in den Inferenzsystemen RUM, FLOPS und MILORD;
    Problem aller MYCIN-ähnlichen Inferenzsysteme: verwendete Kombination unsicherer Konklusionen (Einschließungen) kann zu falschen Ergebnissen führen

- Psychologie:
  - auf Fuzzy-Mengen basierende Theorien über die Wahrnehmung (z.B., Oden & Massaro, 1978 und Folgen) und das Gedächtnis (Massaro, Weldon, & Kitzis, 1991)

- Fahrzeugtechnik und Regelungstechnik (vor allem in Japan):
  - Steuerung automatischer Getriebe in Automobilen, ABS für Automobile
  - Zwischenfrequenzfilter in Radios, Brandmeldetechnik

Beispiel: (Rudolf Kruse)

Entwicklung einer Mining-Software in Magdeburg, die aus über 130 Merkmalen von 18 500 Wagen der Mercedes-S-Klasse ableitet, welche Fehler bei der Kombination bestimmter Ausstattungen auftreten können.

Als fiktives Beispiel nennt Kruse, dass die Batterie öfter streiken kann, wenn ein Wagen sowohl über Klimaanlage als auch Schiebedach verfügt.

Eine solche Fehleranalyse hilft, vorausschauend zu arbeiten, denn das System fand auch weniger offensichtliche Zusammenhänge, die den Daimler-Technikern nicht aufgefallen waren.

baut auf Zadeh auf, der die Vagheit der Sprache bis auf die Programmierebene gebracht hat: etwa beim Data Mining, wenn Computer in großen Informationsbergen nach sinnvollen Zusammenhängen suchen.

Es urde Maschinen beigebracht, mit Symbolen zu operieren, deren Bedeutung den Wörtern der natürlichen Sprache gleichkommen.

Quelle: http://www.informatik.uni-hamburg.de/Info/Presse/zadeh.shtml

- Betriebswirtschaft:
  - *Intelligente Schadenprüfung* (ISP), mit der sich weltweit Versicherungsunternehmen vor Versicherungsbetrug schützen
  - im Bereich der Operation Research Fuzzy-Entscheidungs- u. Optimierungsansätze

- Automatisierungstechnik:
  - AF-gekoppelte Mehrfeld-Belichtungsautomatiken und AF-Prädikation in Spiegelreflexkameras; AF = Autofokus

- andere Bereiche: Prognose des Energieverbrauchs bei Energieversorgern, etc.

2 Charakterisierung der Fuzzy-Methode

2.1 Theoretische Grundlagen

Fuzzy-Mathematik hat drei Wurzeln:

Fuzzy-Logik Fuzzy-Mengenlehre Fuzzy-Maßtheorie

und sind Verallgemeinerung des jeweiligen klassischen Teilgebietes der Mathematik.

Aus Anwendungsbereichen der Fuzzy-Mathematik kommen Begriffe wie Fuzzy-Control (≈ Fuzzy-Regelung ≈ Fuzzy-Steuerung), Fuzzy-Datenanalyse, etc.

2.1.1 Fuzzy-Logik

- früheste Erscheinung; basiert auf den in den 20er Jahren von Lukasiewicz veröffentl. Arbeiten zur mehrwertigen Logik; historisch allerdings noch ältere Wurzeln;
- Zweiwertigkeit wird aufgegeben (gehört zur klassischen Logik):
  neben den Wahrheitswerten "wahr" und "falsch" gibt es ein Kontinuum (etwas lückenlos zusammenhängendes, stetiges) von Quasiwahrheitswerten, die eine Wertigkeit von mehr oder weniger wahr ausdrücken.
- wie in der klassischen Logik:
  für alle Junktoren (Verknüpfung zwischen Aussagen, Operatoren: Konjunktion, Disjunktion, Negation, Implikation) sind sog. Wahrheitswertfunktionen definiert;
  aber unterschiedliche Zuordnungsvorschriften
- Inferenzregeln der Fuzzy-Logik werden als Methoden des "approximativen Schlusses" bezeichnet
  Anwendung z.B. bei Reglern, künstlicher Intelligenz

<u>Vor- und Nachteile:</u>

- trotz erfolgreichen Einsatzes der Inferenzmechanismen in der Praxis, erscheint theoretischer Hintergrund unzureichend, vor allem bei der Auswahl der zu verwendenden Operatoren
- Konjunktion und Disjunktion: Verwendung von Operatoren (t-Normen), d.h. maßtheoretische Interpretation möglich;
- Existenz vieler Operatoren für Implikation, aber Konstruktion teilweise sehr heuristisch

⇒ häufig scheinbare Inkonsequenz der gemeinsamen Auswahl aller Junktoren,
verschiedene Kriterien für Inferenzverfahren nicht erfüllt (aber: auch keine Einigkeit in der Literatur bzgl. der zu fordernden Kriterien)

- Bewährung einiger Inferenzverfahren in der praktischen Anwendung

⇒ eventuelle Schließung der Theorielücke in absehbarer Zeit

2.1.2 Fuzzy-Mengentheorie

- Ursprung in den 60er Jahren; vor allem bei Arbeiten von Zadeh (1965), Klauda (1965) und Goguen (1969)
- Verallgemeinerung der klassischen Mengenlehre
- basiert auf der Fuzzy-Logik: Übertragung der Idee der Mehrwertigkeit auf die Zugehörigkeit eines Elements zu einer Menge
  Die für die Fuzzy-Mengen entwickelte Arithmetik wird wieder auf die Fuzzy-Logik übertragen, indem die logischen Junktoren (Konjunktion, Disjunktion und Negation) wie die Mengenoperationen Vereinigung, Durchschnitt und Komplement behandelt werden
- "Gleitender Übergang" zwischen Menge und Komplement modelliert: Verallgemeinerung der Charakteristischen Funktion/Zugehörigkeitsfunktion
- bereits umfangreicher Bestand an Arithmetik: beruht auf den Grundoperationen der Durchschnitts-, Vereinigungs- und Komplementbildung;
  Existenz einer Vielzahl von unterschiedlichen Operatoren für die Grundoperationen

2.1.3 Ein kurzer Blick auf die Fuzzy-Maßtheorie

- jüngstes Teilgebiet der Fuzzy-Mathematik; in den 70er Jahren durch Sugeno; aber auch frühere Anfänge
- Ziel wie bei der klassischen Maßtheorie: Teilmengen einer gegebenen Grundmenge Maße zuordnen, die bestimmten Anforderungen genügen
- Unterschied zu klassischer Maßtheorie: Forderung der Additivität wird durch eine schwächere Forderung ersetzt
  z.B.: "A oder B" ist sicherer als "sicher A" oder "sicher B", $\rightarrow$ politische Wahl von Parteien (Unentschlossenheit der Wähler)

	Fuzzy-Logik	Fuzzy-Mengentheorie	Fuzzy-Maßtheorie
Beschreibung	vage Bewertung von Aussagen bzgl. ihres Wahrheitsgehaltes	vage Bewertung von Elementen bzgl. ihrer Zugehörigkeit zu einer Menge	vage Bewertung von Ereignissen
μ: M $\rightarrow$ [0,1]	Wahrheitswertfunktion	charakteristische Funktion, Zugehörigkeitsfunktion	Fuzzy-Maß, nicht additives Maß, Choquet-Kapazität
$\mu(.)$	Wahrheitswert einer Aussage	Zugehörigkeitswert eines Elementes zu einer Menge	Bewertung von Teilmengen einer Grundgesamtheit
Grundoperatoren	$\wedge,\vee,\neg$	$\cap,\cup,{}^{c}$	$\mu(A\cap B)$, $\mu(A\cup B)$

Tabelle 2.1: Überblick, Buch: Unsicherheit, Unschärfe und rationales Entscheiden, Die Anwendung von Fuzzy-Methoden in der Entscheidungstheorie, Teil I: Grundlagen der Fuzzy-Mathematik, Notburga Ott

2.2 Die Fuzzy-Mengentheorie

2.2.1 Grundbegriffe

- in der Literatur unterschiedliche Varianten der Notation und der Begriffsabgrenzung zu finden, da die Fuzzy-Mathematik noch sehr junges Gebiet und noch kein allgemein akzeptiertes, geschlossenes theoretisches Gerüst zugrunde liegt;
  Hier: Notation, die am weitesten verbreitet ist;
  Fuzzy-Menge ist definiert als eine Menge geordneter Tupel von Elementen einer Grundmenge und den jeweils zugehörigen Funktionswerten (geben an, zu welchem Grad diese Elemente der unscharf abgegrenzten Teilmengen angehören)

Definition 2-1:

Ist X eine klassische Menge, so heißt die Menge der geordneten Tupel

$\tilde{A}=\{(x,\mu_A(x))|x \in X\}$ mit $\mu_A:X \rightarrow [0,1]$ (Intervall muss nicht zwangsweise von 0 bis 1 sein)

unscharfe Menge auf X oder Fuzzy-Menge auf X (fuzzy set in X).

Die Bewertungsfunktion μ_A heißt *Zugehörigkeitsfunktion (membership function)*, *charakteristische Funktion* oder *Kompatibilitätsfunktion*.

Der mittels dieser Funktion einem Element zugewiesene Wert $\mu_A(x)$ wird *Zugehörigkeitswert* oder *Zugehörigkeitsgrad* genannt.

Begriffsillustration:

(1)

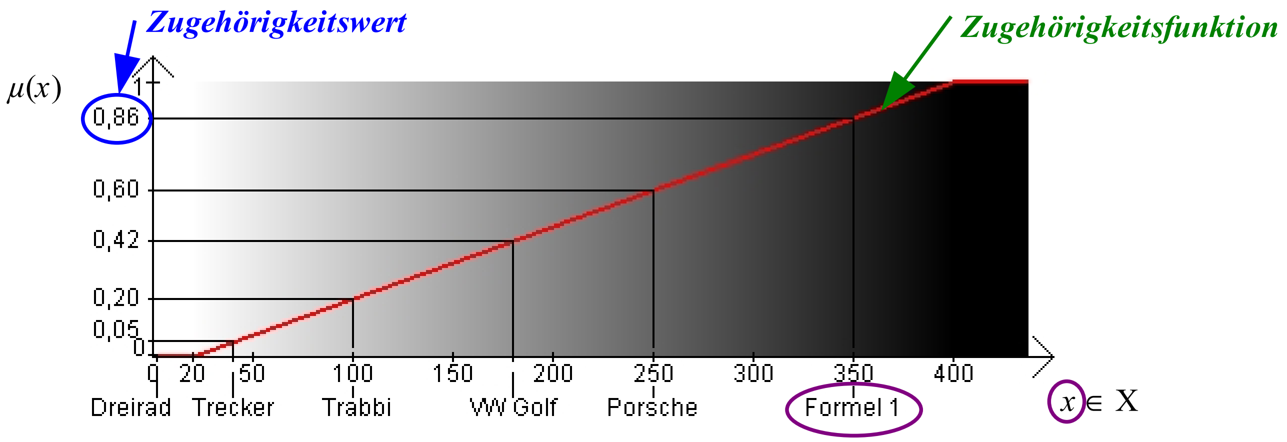


Abbildung 2.1: Zugehörigkeitsfunktion, http://wwwmath.uni-muenster.de/SoftComputing/lehre/material/wwwfuzzyscript/fseinl.html, Einführung in die Fuzzy-Systeme, Peter Wimber, Ralf Wältring, Universität Münster, 2000

stetige Zugehörigkeitsfunktion zur Charakterisierung der schnellen Fahrzeuge, Zugehörigkeitsgrade/-werte der einzelnen Fahrzeuge können über deren Maximalgeschwindigkeit abgelesen werden.

Fahrzeuge *x* sind in der Menge X enthalten.

{(Dreirad,), (Trecker, 0.05), (Trabbi,), (VW Golf, 0.42), (Porsche,), (Formel 1, 0.86), (Flugzeug,)} **(Fehlende Werte tragen wir gemeinsam ein)**

(2) Darstellung der Zahl "2" als Fuzzy-Menge "Ungefähr 2"(Links) durch eine Zugehörigkeitsfunktion und als crispe Menge "2"(Rechts) durch ihre charakteristische Funktion

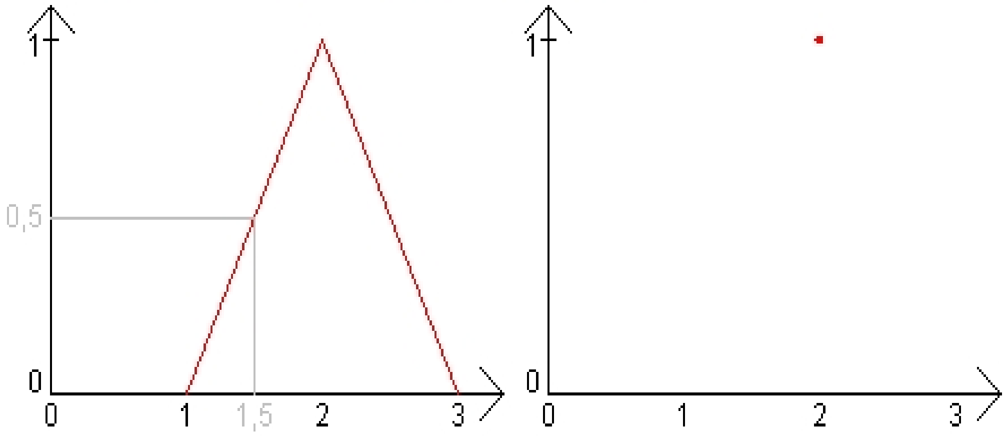


Abbildung 2.2: Zahl "2" als Fuzzy-Menge, http://wwwmath.uni-muenster.de/SoftComputing/lehre/material/wwwfuzzyscript/fseinl.html, Einführung in die Fuzzy-Systeme, Peter Wimber, Ralf Wältring, Universität Münster, 2000

Wert 1,5 hätte z.B. einen Zugehörigkeitswert von 0,5 und beschreibt damit die Nähe zur "2".

Beispiel: Einkommensbewertung

- Betrachtung des Begriffs "hohes Einkommen", wie er bei Analysen zur Einkommensverteilung häufig verwendet wird;
- In der ersten Hälfte der 90er Jahre nach Umfrageergebnissen: monatliche Nettoeinkommen etwa 5000,- DM und mehr;
- Zur Abgrenzung der Menge aller "hohen Einkommen" Festlegung genau eines DM-Betrages (z.B: 5000,-), ab dem ein Einkommen als "hoch" bezeichnet wird.

  ⇒ Liegt ein Einkommen nur einen Pfennig unter dieser Grenze, wird es genauso als "nicht hoch" angesehen wie eines, das mehrere 100 DM unter dieser Grenze liegt.
- ABER:
  - Für Verteilungsanalysen kann dieser Unterschied unter Umständen sehr bedeutsam sein.
  - Um so wichtiger, da die Festlegung der Schwellenwerte zur Abgrenzung der verschiedenen Einkommensklassen ohne allgemein verbindliche Kriterien erfolgt

  ⇒ gewisse Willkür unvermeidlich

- Stattdessen bei einer "unscharfen Menge": Modellierung eines gleitenden Übergangs;

  ⇒ Zugehörigkeit von Werten um jenen Schwellenwert herum **nur zu einem bestimmten Grad** zu der Menge der "hohen Einkommen"

- Wenn die Einkommen den Schwellenwert um einen gewissen Betrag **übersteigen**

⇒ sichere Zugehörigkeit zu der Menge;

charakteristische Funktion hat für diese Elemente wie im klassischen Fall den Wert 1; (**1**)

- Einkommen, die in einem bestimmten Abstand **unter** dem Schwellenwert liegen

⇒ sicher nicht zugehörig zur Menge der "hohen Einkommen";

⇒ Zugehörigkeitswert 0. (**2**)

- Im Zwischenbereich der Charakteristische Funktion: Werte zwischen 0 und 1, (Zunahme des Zugehörigkeitswerts mit steigendem Einkommen)

- In Abbildung 2.3: die charakteristischen Funktionen sowohl von der klassischen Menge als auch von einer Fuzzy-Menge;

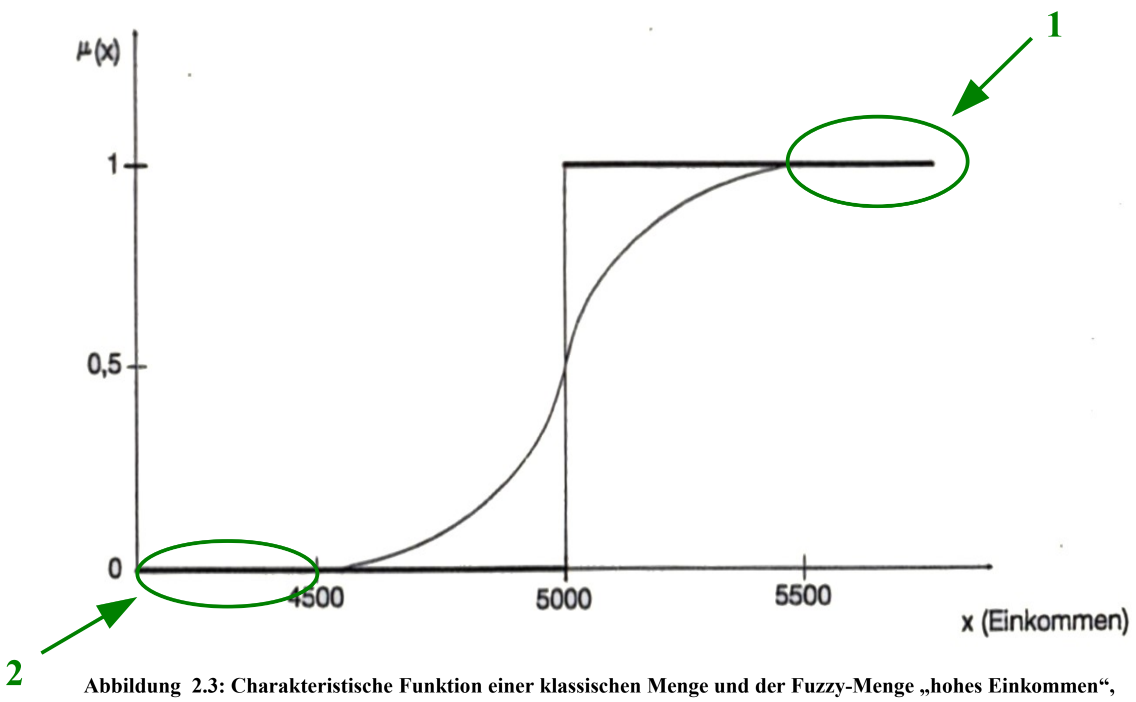


Abbildung 2.3: Charakteristische Funktion einer klassischen Menge und der Fuzzy-Menge „hohes Einkommen", Buch: Unsicherheit, Unschärfe und rationales Entscheiden, Die Anwendung von Fuzzy-Methoden in der Entscheidungstheorie, Teil I: Grundlagen der Fuzzy-Mathematik, Notburga Ott

Definition 2-2:

Stützende Menge oder *Träger* von $\tilde{A}$: $S(\tilde{A}) = \{ x \in X | \mu_A(x) > 0 \}$,

α-Niveau-Menge oder *α-Schnittmenge*: $A_\alpha = \{ x \in X | \mu_A(x) \geq 0 \}$

und als *Kern* von $\tilde{A}$: $A_K = \{ x \in X | \mu(x) = 1 \}$.

⇒ Im obigen Beispiel der „hohen Einkommen":

$S(\tilde{A})$ = {alle Einkommen > 4500.- DM}, A_α = {alle Einkommen ≥ 5000.- DM} für $\alpha = 0.5$

und A_K = {alle Einkommen ≥ 5500.- DM}.

Definition 2-3:

Eine unscharfe Menge Ã heißt *konvex*[1], wenn

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)) \qquad \forall\, x_1, x_2 \in X \quad \forall\, \lambda \in [0, 1].$$

Die *Höhe* einer unscharfen Menge Ã ist das Supremum der Zugehörigkeitswerte

$$\text{hgt}(\tilde{A}) = \sup_{x \in X} \mu_A(x).$$

Eine unscharfe Menge Ã mit hgt(Ã) = 1 heißt *normalisiert*.

Definition 2-4:

Ein konvexe, normalisierte unscharfe Menge Ã auf $\mathbb{R}$ heißt *Fuzzy-Intervall*, wenn gilt

1) $\exists\, m_1, m_2 \in \mathbb{R}:\; m_1 < m_2 \;\wedge\; \mu(x) = 1 \qquad \forall\, x \in [m_1, m_2]$

2) $\mu(x)$ ist stückweise stetig.

Ein Fuzzy-Intervall heißt *Fuzzy-Zahl*, wenn gilt

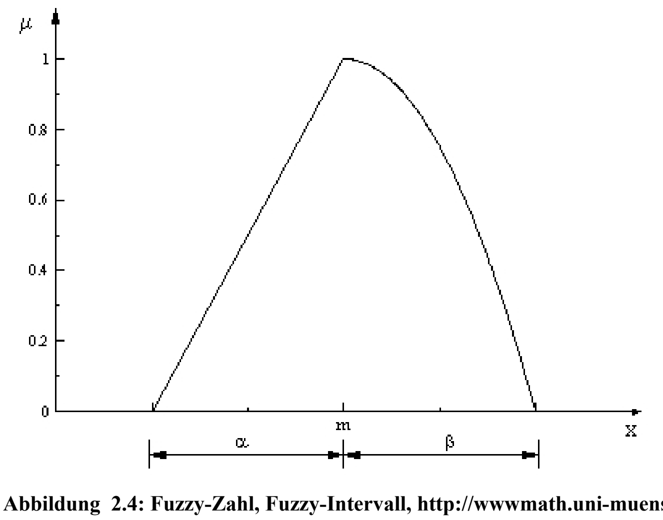
$$\exists_1\, x_0 \text{ mit } \mu(x_0) = 1.$$

Spezialfall von Fuzzy-Mengen sind *Fuzzy-Zahlen* und *Fuzzy-Intervalle* (Verallgemeinerung des Konzepts von Zahlen):

- Fuzzy-Zahlen, z.B.: ungefähr 50km/h, etwa 2 Meter, circa 25°C, ...
- Fuzzy-Intervalle, z.B.: zwischen 5 und 10 km, von ungefähr 9 bis etwa 18 Uhr, ...

Zwischen Fuzzy-Mengen sind nur logische Operationen (z.B. „und“, „oder“) möglich, für Fuzzy-Zahlen sind zusätzlich arithmetische Operationen (z.B. +, -, *, \, $y=x^2$ etc.) möglich.

Bsp.: m_z = Gipfelwert(e)(mean value(s)), α = linke Spannweite, β = rechte Spannweite



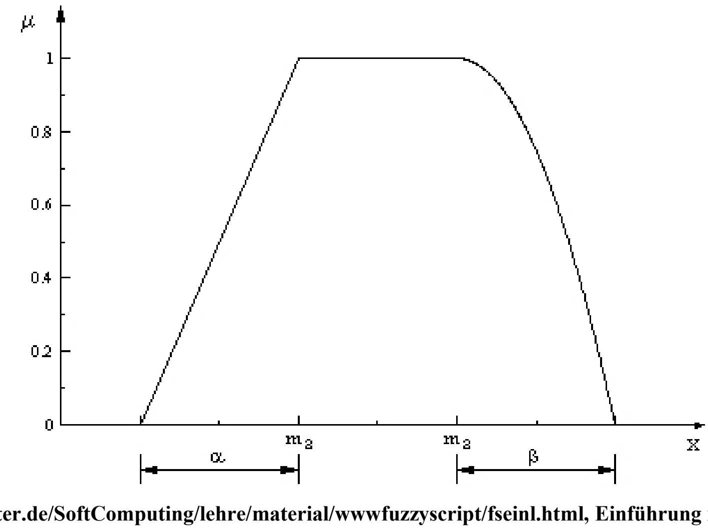


Abbildung 2.4: Fuzzy-Zahl, Fuzzy-Intervall, http://wwwmath.uni-muenster.de/SoftComputing/lehre/material/wwwfuzzyscript/fseinl.html, Einführung in die Fuzzy-Systeme, Peter Wimber, Ralf Wältring, Universität Münster, 2000

1 siehe auch "Konvexe Mengen" in Wikipedia oder Entscheidungstheorie (Prof. Augustin)

Definition 2-5:

Ein unscharfe Menge $\tilde{B}$ heißt *Teilmenge* von $\tilde{A}$, wenn gilt:

$$\tilde{B} \subseteq \tilde{A} \quad \Leftrightarrow \quad \mu_B(x) \leq \mu_A(x) \qquad \forall\, x \in X.$$

Ein m-Tupel ($\tilde{A}_1,\ldots,\tilde{A}_m$) von unscharfen Mengen heißt *Fuzzy-Partition*, wenn gilt

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_{A_i}(x) = 1 \qquad \forall\, x \in X.$$

Die Mengen $\tilde{A}_i$ $i = 1,\ldots,m$ heißen dann *orthogonal*.

- Assymetrie des Einschlusses ist nützlich für die Überprüfung von Beziehungen zwischen empirischen Fällen;
- Einschluss/Teilmengen und Schnitt haben eine spezielle Beziehung;

Beispiel: Einkommensbewertung

- die Fuzzy-Mengen für die einzelnen Einkommensgruppen außer den Randkategorien, die nach einer Seite offen sind, stellen Fuzzy-Intervalle dar.
- bei der Fuzzy-Modellierung existieren Elemente, die mehreren Fuzzy-Mengen angehören.
- die stützenden Mengen ($\mu(x) > 0$) der jeweiligen Fuzzy-Mengen haben also Überlappungsbereiche, deren Elemente jeweils zu einem geringeren Grad als 1 zwei der Einkommenskategorien zugewiesen werden.

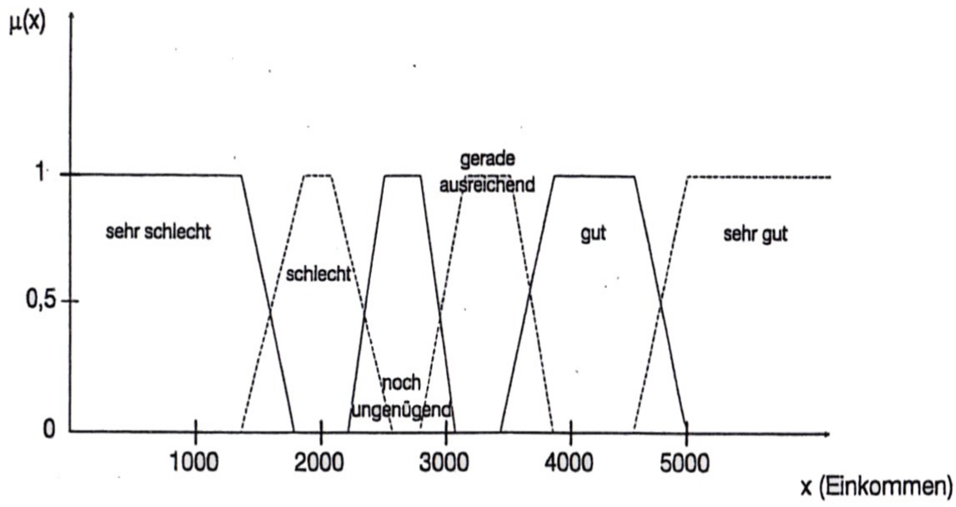


Abbildung 2.5: Fuzzy-Intervalle, subjektive Einkommensbewertung aus dem Sozio-ökonomischen Panel, Buch: Unsicherheit, Unschärfe und rationales Entscheiden, Die Anwendung von Fuzzy-Methoden in der Entscheidungstheorie, Teil I: Grundlagen der Fuzzy-Mathematik, Notburga Ott

- Beschreibung eines sogenannte „*linguistische Variable*“(hier: Einkommen) durch Fuzzy-Mengen ;
  - Ausprägungen linguistischer Variablen sind sprachliche Terme - keine Werte;
  - häufige Verwendung in der Alltagssprache und genügen durchaus der Verständigung und Entscheidungsfindung;
  - meistens nicht scharf abgegrenzt;
  - angemessene Modellierung mit Fuzzy-Mengen möglich;
  - **Beispiel:**

Fragen des Konjunkturtests des Ifo-Instituts aus dem Bereich der Wirtschaftsforschung: überwiegender Teil der Fragen mit unscharfen Kategorien wie z.B.: „zu klein“, „ausreichend“, „zu groß“ oder „eher günstig“, „etwa gleich“, „eher günstig“;

- auch bei wirtschaftspolitischen Entscheidungen vielfacher Gebrauch von derartigen unscharfen Begriffen;
  z.B.: im Stabilitätsgesetz festgelegte Ziele äußerst vage formuliert: „Stabilität des Preisniveaus“, „hoher Beschäftigungsstand“, „außenwirtschaftliches Gleichgewicht“ und „stetiges und angemessenes Wachstum“.

- diese Begriffe sind zwar alle quantitativ operationalisierbar (Präzisierung durch überprüfbare und konkrete Angaben von Forschungsschritten und -zielen),
  aber: Vorgabe genauer scharfer Zielwerte in der Praxis nahezu unmöglich.

2.2.2 Operationen von Fuzzy-Mengen

- für Fuzzy-Mengen mittlerweile umfangreiche Arithmetik entwickelt, die wie auch im klassischen Fall auf den Basisoperatoren Durchschnitts-, Vereinigungs- und Komplementbildung basieren
- Existenz einer Vielzahl unterschiedlicher Operatoren, die mittlerweile im übergreifenden Konzept der sogenannten t-Norm-basierten Operatoren interpretiert wurden (siehe Anhang, Tabelle 2.2)
- ursprüngliche Methode, von Zadeh (1965) vorgeschlagen:
  Verwendung von Minimum- und Maximumoperatoren, die im Rahmen der Fuzzy-Mathematik unter verschiedenen Gesichtspunkten eine herausragende Stellung besitzen

2.2.2.1 Maximum- und Minimum-Operator

Definition 2-6: (ein Beispiel wird vorgerechnet)

$\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ unscharfe Mengen auf X.

Definition der *Fuzzy-Mengen-Schnitt* (Konjunktion) als

$$\tilde{D} := \tilde{A} \cap \tilde{B} \quad \text{mit} \quad \mu_D(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad \forall\, x \in X,$$

die *Fuzzy-Mengen-Vereinigung* (Disjunktion) als

$$\tilde{C} := \tilde{A} \cup \tilde{B} \quad \text{mit} \quad \mu_C(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad \forall\, x \in X$$

und das *Fuzzy-Mengen-Komplement* als

$$\tilde{K} := \tilde{A}^C \quad \text{mit} \quad \mu_K(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \forall\, x \in X.$$

Definition 2-7: Verallgemeinerung der Maximum- und Minimum-Operatoren auf ganze Familien von unscharfen Mengen

Sei $(\tilde{A}_j)_{j \in J}$ eine Familie von Fuzzy-Mengen über der klassischen Menge J als Indexbereich.

→ *allgemeine Vereinigung*: $\tilde{C} := \cup_{j \in J} \tilde{A}_j$ mit $\mu_C(x) = \sup_{j \in J} \mu_{A_j}(x) \quad \forall x \in X$

und der *allgemeine Durchschnitt*: $\tilde{D} := \cap_{j \in J} \tilde{A}_j$ mit $\mu_C(x) = \inf_{j \in J} \mu_{A_j}(x) \quad \forall x \in X$.

Vorteile gegenüber allen anderen Operatoren:

- es gelten für diese Operatoren fast alle klassischen Rechengesetze:

  Kommutativität: $\tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{B} \cup \tilde{A}$

  $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{B} \cap \tilde{A}$

  Assoziativität: $(\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cup \tilde{C} = \tilde{A} \cup (\tilde{B} \cup \tilde{C})$

  $(\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cap \tilde{C} = \tilde{A} \cap (\tilde{B} \cap \tilde{C})$

  Idempotenz: $\tilde{A} \cup \tilde{A} = \tilde{A}$

  $\tilde{A} \cap \tilde{A} = \tilde{A}$

  Adjunktivität: $\tilde{A} \cap (\tilde{A} \cup \tilde{B}) = \tilde{A}$

  $\tilde{A} \cup (\tilde{A} \cap \tilde{B}) = \tilde{A}$

  Distributivität: $\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{C})$

  $\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{C})$

  De Morgan'sche Gesetze:

  $(\tilde{A} \cap \tilde{B})^C = \tilde{A}^C \cup \tilde{B}^C$

  $(\tilde{A} \cup \tilde{B})^C = \tilde{A}^C \cap \tilde{B}^C$

- Numerische Effizienz: von Bedeutung bei großen Problemen und bei Fuzzy-Controllern
  Zum Beispiel ist der Minimum-Operator numerisch wesentlich effizienter als das Algebraische Produkt
- numerisch sehr effizient und einfach zu implementieren und daher die am häufigsten eingesetzten Operatoren

Nachteile/Kritik:

- Gesetz der Komplementarität gilt nicht mehr, da es Überlappungen zwischen Fuzzy-Menge und ihrem Komplement gibt. (Sofern es sich nicht um den Spezialfall einer klassischen Menge handelt) (Fuzzy-Schnitte gehorchen nicht im Allgemeinem dem Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten (law of the excluded middle));

Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten: $A \cap A^C = \emptyset$;

Für $\tilde{A} \neq \emptyset$ und $\tilde{A} \neq X$ gilt: $\tilde{A} \cap \tilde{A}^C \neq \emptyset$

$$\tilde{A} \cup \tilde{A}^C \neq X$$

- Bsp.: Pünktlichkeit: kann sowohl eine gute als auch eine schlechte Eigenschaft sein; kann hilfreich sein, aber auch überbewertet;
- Entstehung widersinniger Ereignisse:
  nach Hisdal (1986 und 1988): bei Verknüpfungen von Fuzzy-Mengen Verwendung von *min-max*-Operatoren für Durchschnitt und Vereinigung häufig keinen Sinn,
  z.B.:
  - Bildung der Vereinigungsmenge "hoch oder sehr hoch" für die Einkommensklassifizierung , so erwartet man, dass dieser Fuzzy-Menge alle Einkommen mit Sicherheit angehören, die mindestens so hoch oder höher sind als die Einkommen mit Zugehörigkeitswert 1 zur Menge "hoch".
  - Die Zugehörigkeitsfunktion bei Verknüpfung mit dem *max*-Operator hat aber folgende Gestalt, die zu der intuitiven Bedeutung der Vereinigungsmenge "hoch oder sehr hoch" im Widerspruch steht:

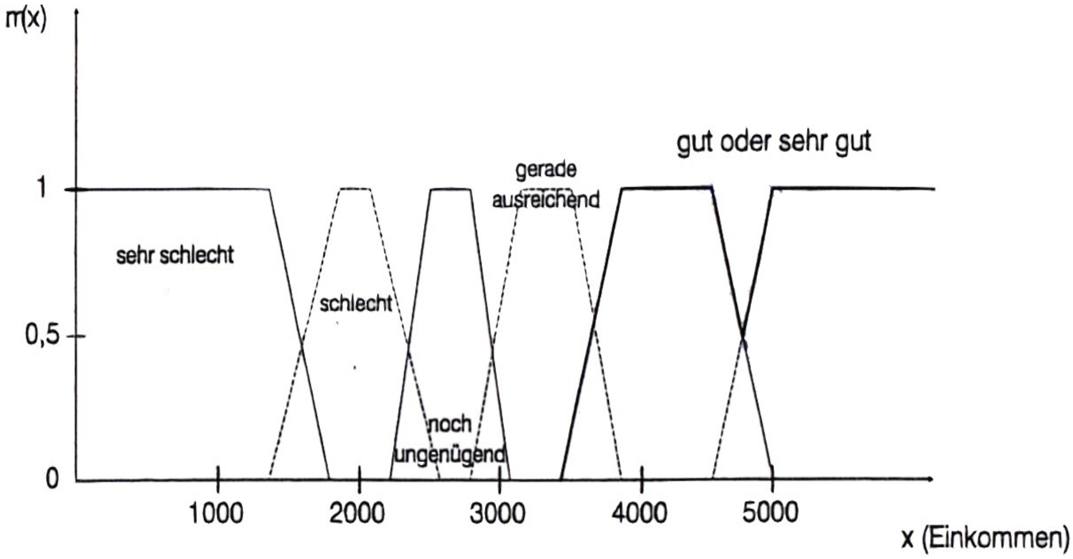


Abbildung 2.6: Einkommensbewertung, Buch: Unsicherheit, Unschärfe und rationales Entscheiden, Die Anwendung von Fuzzy-Methoden in der Entscheidungstheorie, Teil I: Grundlagen der Fuzzy-Mathematik, Notburga Ott

weiteres Beispiel: Gütereigenschaften

- Fuzzy-Mengen repräsentieren Eigenschaften, die ein Gut haben kann
- Zugehörigkeitswerte drücken den Grad aus, mit dem für ein Gut die jeweilige Eigenschaft erfüllt ist

$\Rightarrow$ charakteristische Funktion der Durchschnittsmenge kennzeichnet den Grad, mit dem ein Gut zwei Eigenschaften gleichzeitig hat und
die Vereinigungsmenge den Grad, mit dem wenigstens eine der beiden Eigenschaften erfüllt

ist.

➔ Ist die zugrunde liegende Information die individuelle Bewertung einer einzelnen Person

⇒ sinnvoll: für den Durchschnitt das Minimum der Zugehörigkeitsgrade und
für die Vereinigung das Maximum der Zugehörigkeitsgrade.

- **z.B.:** Eine Person schätzt ein Auto mit einem Grad von 0,5 als "sportlich" und mit 0,8 als "energiesparend" ein,

⇒ so darf man davon ausgehen, dass diese Person den Wagen ebenfalls mit 0,5 als "sportlich und gleichzeitig energiesparend" einschätzt.

  - Da es sich um die Bewertung des logischen "und", also das gleichzeitige Zutreffen beider Eigenschaften handelt, macht ein höherer Zugehörigkeitswert keinen Sinn.
  - Umgekehrt erscheint es aber auch nicht plausibel, dass für das gemeinsame Vorhandensein beider Eigenschaften ein niedriger Zugehörigkeitswert angegeben wird, als für jede einzelne der beiden Eigenschaften.
  - analog:
    als Zugehörigkeitsgrad für das Zutreffen wenigstens einer der beiden Eigenschaften wird das Maximum der beiden einzelnen Grade angegeben.

⇒ also: Wagen wird mit Grad 0,8 als "entweder sportlich oder energiesparend" eingeschätzt.

➔ Sind die zugrunde liegenden Informationen Aggregationsergebnisse, d.h. dass die bekannten Zugehörigkeitswerte zu den beiden Fuzzy-Mengen angeben, zu welchem Grad das Auto **im Mittel** der befragten Stichprobe als "sportlich" und als "energiesparend" eingestuft wird, scheinen Minimum- und Maximum-Operatoren nicht mehr angebracht.
Grund: Es kann nicht davon ausgegangen werden, dass alle Personen bezüglich der beiden Eigenschaften die gleiche Rangordnung bilden.
Gibt es im obigen Beispiel eine zweite Person, die den Wagen mit 0,6 als "sportlich" und mit 0,5 als "energiesparend" einschätzt, so zeigt sich folgendes Ergebnis:

	sportlich	energiesparend	sportlich und energiesparend	sportlich oder energiesparend
Person A	0,5	0,8	0,5	0,8
Person B	0,6	0,5	0,5	0,6
Ø (Mittelwert); nur Aggregations-information	0,55	0,65	0,5 (0,55)	0,7 (0,65)

Tabelle 2.4: Beispiel Gütereigenschaften, Buch: Unsicherheit, Unschärfe und rationales Entscheiden, Die Anwendung von Fuzzy-Methoden in der Entscheidungstheorie, Teil I: Grundlagen der Fuzzy-Mathematik, Notburga Ott

- Annahme: nur Aggregatwerte für "sportlich" und "energiesparend" bekannt

  ⇒ Anwendung des Minimum-Operators auf das arithmetische Mittel der beiden Personen liefert für das logische "und" einen Wert von 0,55

  ABER: wahrer Durchschnittswert (arithmetisches Mittel über das Minimum der beiden Personen) nur 0,5.

  ⇒ Anwendung des Maximum-Operators auf das arithmetische Mittel der beiden Personen liefert für das logische "oder" einen Wert von 0,65

  ABER: wahrer Vereinigungswert (arithmetisches Mittel über das Maximum der beiden Personen 0,7.

  Offensichtlich:

  - Wahl eines Operators für den Durchschnitt im Fall von Aggregatsdaten, dessen Wert kleiner als der Minimum-Operator ist;
  - Wahl eines Operators für die Vereinigung im Fall von Aggregatsdaten, dessen Wert größer als der Maximum-Operator ist.

➔ Dies leisten die t-Normen und t-Conormen.

⇒ **Erkenntnis:**

Es macht einen Unterschied, in welcher Reihenfolge verknüpft wird:

- Liegen zuerst die Bewertungen der Personen vor und werden dann die verschiedenen Eigenschaften aggregiert, so sollten Minimum- und Maximum-Operatoren verwendet werden.
- Hat man aber nur die Aggregationsinformation zur Verfügung, sollten sinnvollerweise nicht die Minimum- und Maximum-Operatoren verwendet werden.

⇒ Grund: durch die Aggregationsinformationen (Mittelwerte) der Personen sind schon Informationen verwischt worden

eventuelle Folge: Unschärfe kann sich akkumulieren.

Vergleichbares Beispiel:

- $\ln(a+b) \neq \ln(a)+\ln(b)$
- $Var(X+Y) \neq Var(X)+Var(Y)$

2.2.2.2 t-Normen und t-Conormen

- von verschiedenen Autoren viele weitere Verknüpfungsoperatoren vorgeschlagen, die verschiedene Nachteile der *min-max*-Operatoren vermeiden

  $\Rightarrow$ *min-max*-Operatoren sind ein Spezialfall von t-Normen und t-Conormen
- Konzept der t-Normen (triangular norm, zu deutsch: "Dreiecksnorm") ist älter als die Fuzzy-Mathematik
- Ursprung im Bereich der statistischen Verallgemeinerung von metrischen Räumen:
  - erste Ansätze von Menger(1942) und Wald(1943): (hier t-Norm für eine allgemeinere Funktion verwendet);
  - Definitionseigenschaften der heutigen t-Norm, erstmals von Schweizer/Sklar (1960: 318) aufgestellt = Definition des *Menger-Raums*;
  - Vektorintegration basiert auch auf diesem Konzept;
- Anforderungen an die t-Norm:
  - Anforderungen, die an Mengenoperatoren gestellt werden
  - Ansätze, die von verschiedenen Autoren zur Durchschnitts- und Vereinigungsbildung vorgeschlagen wurden, sind spezielle t-Normen

Definition 2-8:

Unter einer *t-Norm* versteht man eine binäre Operation

$\boldsymbol{t}:[0,1]\times[0,1] \rightarrow [0,1]$,

für die gilt:

(1) Kommutativität: $\boldsymbol{t}(x,y) = \boldsymbol{t}(y,x)$

(2) Assoziativität: $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{t}(x,y),z) = \boldsymbol{t}(x,\boldsymbol{t}(y,z))$

(3) Monotonie: $x \leq y \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{t}(x,z) \leq \boldsymbol{t}(y,z)$

(4) Eins- und Nullelement: $\boldsymbol{t}(x,1) = x, \qquad \boldsymbol{t}(x,0) = 0.$

Unter einer *t-Conorm (s-norm)* versteht man die binäre Operation

$\boldsymbol{s}:[0,1]\times[0,1] \rightarrow [0,1]$

mit

(1) Kommutativität: $\boldsymbol{s}(x,y) = \boldsymbol{s}(y,x)$

(2) Assoziativität: $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{s}(x,y),z) = \boldsymbol{s}(x,\boldsymbol{s}(y,z))$

(3) Monotonie: $x \leq y \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{s}(x,z) \leq \boldsymbol{s}(y,z)$

(4) Eins- und Nullelement: $\boldsymbol{s}(x,0) = x, \qquad \boldsymbol{s}(x,1) = 1.$

- t-Norm erzeugt die Durchschnittsmenge der Fuzzy-Mengen:

  $\tilde{D} = \tilde{A} \cap_t \tilde{B}$ mit $\mu_D(x) = \boldsymbol{t}(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad \forall\, x \in X.$

  t-Conorm erzeugt die Vereinigungsmenge der Fuzzy-Mengen:

  $\tilde{C} = \tilde{A} \cup_s \tilde{B}$ mit $\mu_C(x) = \boldsymbol{s}(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad \forall\, x \in X.$

- Vergleichbare Verallgemeinerung der Komplementbildung in der Literatur kaum zu finden. Versuch einiger Autoren (Trillas (1979), Dubois/Prade (1982a), Dombi (1982) und Weber (1983)), diese theoretische Lücke mit der Definition einer Negationsfunktion zu füllen.

Diese Negationsfunktion erfüllt in Verbindung mit einem t-Norm/t-Conorm-Paar Eigenschaften wie die *De Morgan'schen Gesetze* und die *Komplementgesetze*:

Definition 2-9:

Eine Funktion c:[0,1] → [0,1] heißt *Negation*, wenn gilt

(1) $\boldsymbol{c}(0) = 1$ und $\boldsymbol{c}(1) = 0$

(2) $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{c}(x)) = x$ (Involution = selbstinverse Abbildung, lat.: *involvere* = einwickeln)

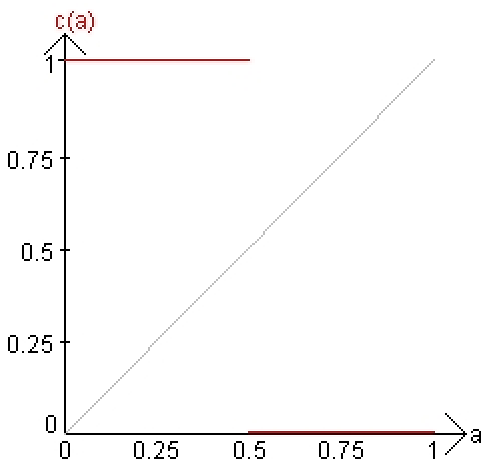
(3) $\boldsymbol{c}$ ist stetig

(4) $\boldsymbol{c}$ ist streng monoton fallend. (Monotonie)

Beispiel für Involution:

$$c(a) = \begin{cases} 1 & | \; 0 \leq a < 0,5 \\ 0 & | \; 0,5 \leq a \leq 1 \end{cases}$$

$$c(a) = \begin{cases} -2a + 1 & | \; 0 \leq a \leq \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2} & | \; \frac{1}{3} < a \leq 1 \end{cases}$$



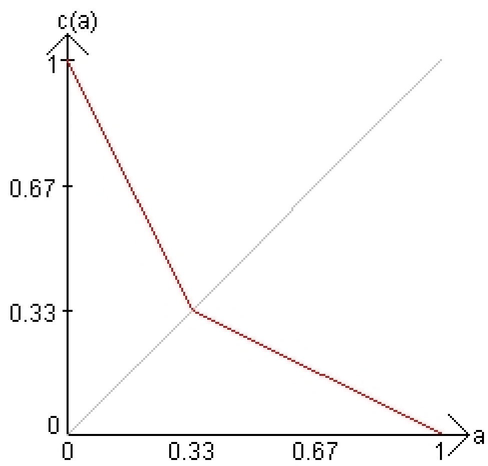


Abbildung 2.7: nicht stetige und nicht involutive Abbildung

Abbildung 2.8: stetige und involutive Abbildung, http://wwwmath.uni-muenster.de/SoftComputing/lehre/material/wwwfuzzyscript/fseinl.html, Einführung in die Fuzzy-Systeme, Peter Wimber, Ralf Wältring, Universität Münster, 2000

aus involutiv folgt stetig, aber nicht umgekehrt;

⇒ **Dualität:** Überführung einer t-Norm und einer t-Conorm so, dass zusätzlich die De Morgan'schen Gesetze erfüllt sind:

$$\boldsymbol{s}(x,y) = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{t}(\boldsymbol{c}(x),\boldsymbol{c}(y))). \tag{2.1}$$

- Sie werden dann zueinander „c-duale“ Operatoren genannt, das Tripel ($\boldsymbol{t}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{c}$) heißt *De Morgan-Tripel*.
- die meisten dualen t-Norm/r-Conorm-Paare basieren auf der Komplementbildung aus **Def. 2-6**: $\boldsymbol{c}(x) = 1 - x$.
- werden meist einfach zueinander "**dual**" genannt

⇒ Berechnung der t-Conormen gemäß (2.1) aus den t-Normen:

$$\boldsymbol{s}(x,y) = 1 - \boldsymbol{t}(1 - x, 1 - y) \tag{2.2}$$

- teilweise Verwendung von (2.2) direkt als Definition der t-Conormen (insbesondere Schweizer/Sklar (1961))

⇒ Beschränkung der Betrachtung auf solche Operationen-Paare, die mit dem Fuzzy-Mengen-Komplement $\boldsymbol{c}(x) = 1 - x$ gebildet werden;

Die wichtigsten t-Normen:

- in **Tabelle 2.2** (siehe Anhang) sind die wichtigsten t-Normen dargestellt;
- die hier genannten Paare sind zueinander dual, d.h. werden mit der Negation $\boldsymbol{c}(x) = 1- x$ gebildet; Ausnahme: Weber'sche Operatoren
- alle Operatoren erfüllen aufgrund der **Def. 2-8** Kommutativität und Assoziativität und aufgrund der Bedingung (2.1) die De Morgan'schen Gesetze.
- Distributivität und Idempotenz gelten nur für die *min-max*-Operatoren.
- Im Fall von klassischen Mengen, soweit sie hierfür definiert sind, liefern alle t-Normen den klassischen Durchschnitt und alle t-Conormen die klassische Vereinigung.
- eventuelle **Kritik**: Möglichkeit der Manipulation durch Anwendung einer bestimmten t-Norm/t-Conorm oder durch unterschiedliche Einteilung von Zugehörigkeitsgraden/-stufen
- Die "algebraischen", "beschränkten" und "drastischen" Operatoren werden auch "Summe" für die Vereinigung und "Produkt" oder "Differenz" für den Durchschnitt genannt.
  Operatoren werden auch als "*interaktive Verknüpfungen*" bezeichnet, da der Zugehörigkeitswert im allgemeinen nicht mit einem der beiden Zugehörigkeitswerte μ_A oder μ_B identisch ist, sondern von beiden abhängt.
- Bzgl. der ersten vier Operatoren in Tabelle 2.2 lassen sich folgende Ordnungen angeben, die für alle Kombinationen von $x, y \in [0,1]$ gelten:

$$\mathrm{dra}_t(x,y) \leq \mathrm{bes}_t(x,y) \leq \mathrm{alg}_t(x,y) \leq \min(x,y) \tag{2.3}$$
$$\max(x,y) \leq \mathrm{alg}_s(x,y) \leq \mathrm{bes}_s(x,y) \leq \mathrm{dra}_s(x,y)$$

das entspricht:

$$\begin{Bmatrix} x & falls\ y=1 \\ y & falls\ x=1 \\ 0 & sonst \end{Bmatrix} \leq max\{0, x+y-1\} \leq x \cdot y \leq min\{x, y\}$$

$$max\{x, y\} \leq x+y-xy \leq min\{1, x+y\} \leq \begin{Bmatrix} x & falls\ y=0 \\ y & falls\ x=0 \\ 1 & sonst \end{Bmatrix}$$

daraus folgt:

- bei den Durchschnittsoperatoren liefert also immer der *min*-Operator den größten Wert und der drastische Operator den kleinsten;
- bei den Vereinigungsoperatoren liefert genau umgekehrt: der *max*-Operator liefert den kleinsten und der drastische Operator den größten Wert;
-

- Neben diesen vier Basisoperatoren gibt es eine Reihe von parametrischer Operatoren, die jeweils ganze Familien von t-Normen und t-Conormen erzeugen. (wie in der **Tabelle 2.2** zusehen ist)
- Diese Basisoperatoren (die eben besprochen wurden) ergeben sich dabei als Sonderfälle für bestimmte Parameterwerte bzw. als Grenzwerte an den Definitionsrändern oder bei Definitionslücken.

Die wichtigsten Grenzwerte einiger der parametrischen Operatoren sind in **Tabelle 2.3** (siehe Anhang) und ihre Laufbereiche in Abbildung 2.9 dargestellt:

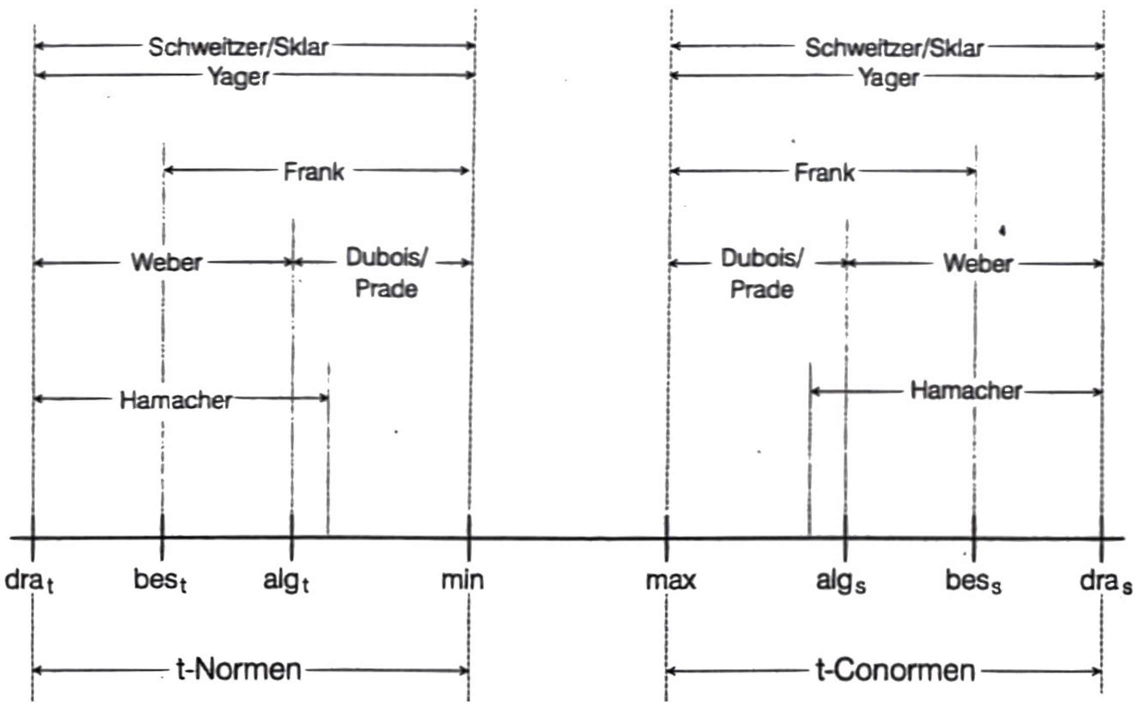


Abbildung 2.9: Laufbereiche ausgewählter t-Normen und t-Conormen, Buch: Unsicherheit, Unschärfe und rationales Entscheiden, Die Anwendung von Fuzzy-Methoden in der Entscheidungstheorie, Teil I: Grundlagen der Fuzzy-Mathematik, Notburga Ott

- Erkenntnis: alle Werte zwischen dem drastischen und dem *min*- bzw. *max*-Operatoren lassen sich durch geeignete parametrisierte Operatoren erzeugen. (Vertiefung: siehe Butnariu/Klement(1993) und Mizumoto(1989))

Je nachdem, welche Art Unschärfe durch die Fuzzy-Mengen beschrieben wird, sind für Durchschnitte oder Vereinigungen jeweils unterschiedliche Operatoren zu verwenden.

2.2.2.3 Kompensatorische Operatoren

- Werte der *kompensatorischen Operatoren* liegen zwischen den Werten der Durchschnitts- und der Vereinigungsoperatoren;
- **Motivation:** (kompensatorisch ≈ ausgleichend)
  Worte "und" und "oder" in der Alltagssprache nicht nur im strengen logischen Sinn verwendet, sondern häufig *kompensatorischer Charakter*, d.h. geringe Erfüllung eines Kriteriums wird häufig für eine entsprechend höhere bei einem anderen Kriterium in Kauf genommen.
  Bsp.:
  - Bewertung eines Wagens bzgl. der Eigenschaften "sportlich und energiesparend" eher ein kompensatorisches "und",
    d.h. schlechte Erfüllung eines der beiden Merkmale wird durch eine bessere des anderen Merkmals kompensiert.

  ⇒ sinnvolle Annahme: Erzeugung des Zugehörigkeitswertes zu der Verknüpfungsmenge der beiden Fuzzy-Mengen durch einen "mittelnden" Operator
- Dass ein "und" in vielen Fällen in genau solchem Sinn verstanden wird, wurde durch Experimentalstudien mehrfach nachgewiesen (siehe z.B.: Rommelfanger/Unterharnscheidt (1988) oder Zimmermann (1991a:Kap. 13.4))
- Zusammenfassung der wichtigsten kompensatorischen Operatoren, siehe Anhang **Tabelle 2.5**
  - mit diesen Operatoren möglich: jede beliebige Verknüpfung von Fuzzy-Mengen;
    vor allem notwendig bei multikriterieller Entscheidungsfindung
    z.B.: Verknüpfung unterschiedlicher, vage formulierter Ziele und gleichzeitige Modellierung lexikographischer, kompensatorischer und anderer Zielkombinationen.

2.2.3 Erweiterungsprinzip und erweiterte Operatoren

- Verallgemeinerung auch anderer Verknüpfungen im Grundbereich der Fuzzy-Mengen möglich; aufbauend auf den bisherigen verallgemeinerten mengentheoretische Grundoperationen;
- Generalisierungen für Abbildungen von Zadeh (1965) nach dem sogenannten Erweiterungsprinzip (oder Extensionsprinzip) vorgeschlagen;

Definition 2-10:

Sei $g: X_1 \times ... \times X_n \to Y$ eine Abbildung vom kartesischen Produkt der klassischen Mengen $X_1, ..., X_n$ in die klassische Menge Y.

Die *erweiterte Abbildung* ergibt sich dann als

$$\hat{g}: \tilde{A}_1 \times ... \times \tilde{A}_n \to \tilde{B}$$

mit

$$\tilde{A}_i = \{x, \mu_{A_i}(x) | x \in X_i\} \qquad \forall\ i = 1, ..., n$$

$$\tilde{B} = \{y, \mu_B(y) | y = g(x_1, ..., x_n)\} \qquad \text{und}$$

$$\mu_B(y) = \boldsymbol{s}\{\boldsymbol{t}(\mu_{A_1}(x_1), ..., \mu_{A_n}(x_n)) | (x_1, ..., x_n) \in X^n \wedge y = g(x_1, ..., x_n)\} .$$

$\tilde{A}_i$ sind Fuzzy-Mengen auf X, $\tilde{B}$ ist Fuzzy-Menge auf Y, wie in ersten Definitionen.

s und ***t*** sind t-Norm und t-Conorm, wie in vorangegangenen Definitionen.

- mit diesem Erweiterungsprinzip ist Ausdehnung sehr vieler Operationen, die auf klassischen Mengen definiert sind, auf unscharfe Mengen möglich;
- vor allem wichtig für Operationen auf den reellen Zahlen, weil auch algebraische Operationen (Addition und Multiplikation für unscharfe Objekte wie Fuzzy-Zahlen und Fuzzy-Intervallen) definiert werden können;

Weitere Literatur: von Rommelfanger (1988), Gottwald (1989), Moore (1969)

2.2.4 Arithmetik bei Fuzzy-Zahlen und Fuzzy-Intervallen

Definition 2-11:

Seien Ã und B̃ Fuzzy-Intervalle über $\mathbb{R}$, dann lassen sich nach dem Erweiterungsprinzip in der Zadeh'schen Form folgende Operationen definieren:

- *Summe:* S̃:= Ã + B̃ mit $\mu_S(t)=sup\{min(\mu_A(x_1),\mu_B(x_2))|x_1,x_2 \in \mathbb{R} \wedge x_1+x_2=t\} \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- *Produkt:* P̃:= Ã · B̃ mit $\mu_P(t)=sup\{min(\mu_A(x_1),\mu_B(x_2))|x_1,x_2 \in \mathbb{R} \wedge x_1 x_2=t\} \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- *Negation:* Ñ:= - Ã mit $\mu_N(t)=sup\{\mu_A(x)|x \in \mathbb{R} \wedge t=-x\} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

  ⇒ *Differenz:*

  D̃:= Ã - B̃ = Ã + (- B̃) mit

$$\mu_D(t)=sup\{min(\mu_A(x_1),\mu_B(-x_2))|x_1,x_2 \in \mathbb{R} \wedge x_1+x_2=t\} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$
$$=sup\{min(\mu_A(x_1),\mu_B(x_2))|x_1,x_2 \in \mathbb{R} \wedge x_1-x_2=t\} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- *Kehrwert:* K̃:= Ã$^{-1}$ mit $\mu_K(t)=sup\left\{\mu_A(x)|x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \wedge \frac{1}{x}=t\right\} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$$=\mu_A\left(\frac{1}{t}\right) \quad \forall \frac{1}{t} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

  ⇒ *Quotient:*

  Q̃:= Ã / B̃ = Ã · (B̃$^{-1}$) mit

$$\mu_Q(t)=sup\left\{min\left(\mu_A(x_1),\mu_B\left(\frac{1}{x_2}\right)\right)|x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \wedge x_1 x_2=t\right\}$$
$$=sup\left\{min(\mu_A(x_1),\mu_B(x_2))|x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \wedge \frac{x_1}{x_2}=t\right\} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Sofern es die Fuzzy-Intervalle Ã und B̃ Fuzzy-Zahlen sind, ist auch das Ergebnis eine Fuzzy-Zahl.

- Rechenoperationen auf gewöhnlichen Zahlen sind als Spezialfälle in dem oben Genannten enthalten;
- wichtigste Unterschiede:
  - Differenz identischer Fuzzy-Zahlen ergibt keine "0", sondern eine Fuzzy-Null, d.h. negative und positive Werte als Ergebnis der Differenz möglich;
  - Division einer Fuzzy-Zahl durch dieselbe Fuzzy-Zahl ergibt keine "1", sondern ein Fuzzy-Eins;

Bsp.: "ungefähr 1" + "ungefähr 1" - "ungefähr 1" = "ungefähr 1" (**aber:** "ungefähr 1" ≠ "ungefähr 1")

- Fuzzy-Arithmetik (**Def. 2-11**) kann als Verallgemeinerung der gewöhnlichen Intervall-Arithmetik angesehen werden:

- sowohl die stützende Menge als auch jeder α-Schnitt einer/s Fuzzy-Zahl/Fuzzy-Intervalls ist ein gewöhnliches Intervall,
  das mittels der Intervallarithmetik mit α-Schnitten anderer Fuzzy-Intervalle verknüpft werden kann;
- **Beispiel:** beim Vortrag: Ã = "ungefähr 2", B̃ = ("ungefähr 2")^2 , S̃ = Ã + B̃

- Operationen gelten nur für die in diesem Kapitel definierte Form, nicht für andere t-Normen;

<u>L-R-Fuzzy-Zahlen:</u>

- in der Praxis häufige Anwendung der L-R-Fuzzy-Zahlen, speziell die triangulären L-R-Fuzzy-Zahlen;
- Gründe:
  - besonders einfache Durchführung der algebraischen Operationen;
  - Approximation mit einer L-R-Fuzzy-Zahl für praktische Anwendungen hinreichend genau;

Definition 2-12:

Eine Fuzzy-Zahl M̃ = $(m,\alpha,\beta)_{\mathrm{LR}}$ heißt *L-R-Fuzzy-Zahl*, wenn sich ihre Zugehörigkeitsfunktion darstellen lässt als

$$\mu_M(x)=\begin{Bmatrix} L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right) & \text{für } x\leq m \\ R\left(\frac{x-m}{\beta}\right) & \text{für } x>m \end{Bmatrix}$$

mit $\mu_M(m)=1, \quad \alpha,\beta>0$

und L, R sind *Referenzfunktionen* mit den Eigenschaften

L, R: [0, $+\infty$ [$\rightarrow$ [0, 1]

L(0) = R(0) = 1 und L, R ist nicht stetig in [0, $+\infty$ [

α und β heißen *linke* und *rechte Spannweite* von M̃.

L-R-Fuzzy-Zahlen mit linearen Referenzfunktionen werden *trianguläre* oder *trapezförmige* Fuzzy-Zahlen genannt.

Schreibweise: $\tilde{M}=(m;\alpha;\beta)_{LR}=\langle m;m-\alpha,\beta-m\rangle=\langle m;m_1,m_2\rangle$.

Definition 2-13:

Ein Fuzzy-Intervall $\tilde{M} = (m_1;m_2;\alpha;\beta)_{LR}$ heißt *L-R-Fuzzy-Intervall*, wenn sich seine Zugehörigkeitsfunktion darstellen lässt als

$$\mu_M(x) = \begin{Bmatrix} L\left(\frac{m_1 - x}{\alpha}\right) & \text{für } x \le m_1 \\ 1 & \text{für } m_1 < x \le m_2 \\ R\left(\frac{x - m_2}{\beta}\right) & \text{für } x > m \end{Bmatrix}$$

mit $\alpha, \beta > 0$ und L, R sind Referenzfunktionen wie oben definiert.

L-R-Fuzzy-Intervalle werden auch dargestellt als

$$\tilde{M} = [m; c; \alpha; \beta]_{LR} \quad \text{mit} \quad m = \frac{m_1 + m_2}{2} \quad \text{und} \quad c = \frac{m_2 - m_1}{2}.$$

L-R-Fuzzy-Intervalle mit linearen Referenzfunktionen werden auch als *traqpezförmige* Fuzzy-Intervalle bezeichnet.

- algebraische Operatoren vereinfachen sich für derartige L-R-Fuzzy-Zahlen bzw. -Intervalle; (näheres siehe Buch Fr. Ott)

- für praktische Anwendungen gibt es keine richtigen Kriterien zur Auswahl der geeigneten Operatoren;
  - orientiert sich eher an der praktische Handhabbarkeit und den empirischen Ergebnissen (vgl. Zimmermann 1991)
    nicht an axiomatische Rationalitätskriterien

Weitere genauere Informationen zu Erweiterungsprinzip, Fuzzy-Zahlen und -Intervalle siehe:

http://www.mathe.tu-freiberg.de/~dempe/Skripte/Unscharfe%20Optimierung/FuzzyZahlen.pdf

(18.06.2009)

3 Zusammenfassung

- Fuzzy-Logik vor allem Verallgemeinerung der Aussagenlogik;
  Einzelnen Aussagen werden mittels Wahrheitswertfunktionen Werte zwischen 0 und 1 zugewiesen = Bewertung des Wahrheitsgehaltes der Aussage
- Fuzzy-Mengentheorie betrachtet "unscharfe Mengen", für deren Elemente es unterschiedliche Grade der Zugehörigkeit zu dieser Menge gibt; Werte liegen ebenfalls zwischen 0 und 1;
  Zugehörigkeitsgrade zur Fuzzy-Menge werden den einzelnen Elementen durch die charakteristische Funktion/Zugehörigkeitsfunktion zugewiesen;
- Zusammenhang zur Fuzzy-Logik über die Prädikatenlogik (wie bei zweiwertigem Fall):
  Umfang eines Prädikats/Begriffs ist die Klasse aller derjeniger Objekte zu verstehen, auf die jenes Prädikat zutrifft; diese Klasse kann direkt als Menge im Sinne der Mengenlehre betrachtet werden;
  Analog: Fuzzy-Mengen als Umfang mehrwertiger Prädikate (d.h. vagen Begriffen);
  Zugehörigkeitswerte der Elemente entsprechen dann den Wahrheitswerten der Aussagen, das Prädikat trifft auf das Element zu.
  Beispiel: Wahrheitswert von 0,5 der Aussage "x gehört zur Menge Y" interpretieren als Zugehörigkeitsgrad 0,5 von Element x zur Menge Y.
- umfangreiches Thema und absolut wichtiger Ansatz, weil fast alles im Alltag oder in der Wissenschaft unscharf ist bzw. Kategorien, die der Mensch festlegt hat, verwischen
- viele Anwendungsmöglichkeiten, die teilweise immer noch erschlossen werden, da die Fuzzy-Mathematik eine Verallgemeinerung der klassischen Mathematik darstellt
  ⇒ Aufbau der Fuzzy-Mathematik ähnlich bzw. oft gleich der klassischen Mathematik
- teilweise genauer als die klassische Mathematik durch die Aufnahme von Ungenauigkeit, aber zumindest mit meist weniger Aufwand verbunden
- klassische Mathematik baut auf idealisierter Welt (Klarheit, Genauigkeit) auf und "verschweigt" Ungenauigkeit
- Wahrheitsgehalt einer Aussage liegt zwischen 0 und 1 (meist); etwas anderes wäre eher sinnlos, da die Werte Wahrheitsanteile bzw. Zugehörigkeitsgrade darstellen
- Werte gehören oft sowohl zu einer Menge als auch zu deren Komplement (hat auch mit den Anteilswerten zu tun)
- die wichtigsten Operationen von Fuzzy-Mengen:
  - Maximum-Minimum-Operator
  - t-Normen und t-Conormen: min-max-Operatoren sind Spezialfall der t-Normen;
    viele verschiedene t-Normen sind erfunden worden

    - Kompensatorische Operatoren

- Fuzzy-Arithmetik ist Verallgemeinerung der klassischen Intervall-Arithmetik

  ⇒ Fuzzy-Zahlen, Fuzzy-Intervalle

- Vereinfachungen der Fuzzy-Arithmetik: L-R-Fuzzy-Zahlen

<u>Kritik:</u>

- **Jedoch:** Sowohl Bedeutung als auch Ermittlung der Zugehörigkeitswerte noch nicht befriedigend geklärt;

  Zitat von Gottwald (1989: 340): "der Übergang zu unscharfen Mengen als Umfänge unscharfer Begriffe gestattet zwar, Grenzfälle des Zutreffens eines Begriffes dadurch zu modellieren, dass jenen Grenzfällen ein 'zwischen' wahr und falsch gelegener Enthaltenseinswert im (verallgemeinerten) Begriffsumfang zugeordnet wird, aber welcher Wert dies sein soll, ist damit noch nicht geklärt und wird durch die bisherige Theorie auch nicht angezeigt."

- Fuzzy-Mathematik versucht unter anderem linguistische Unschärfe in Schärfe/Genauigkeit zu verwandeln;

  Meine Meinung: Entwicklung der Fuzzy-Mathematik, um die Ungenauigkeit des Menschen bzw. der Welt auszubügeln.

- Manipulation möglich durch vielfältige Auswahl von Operatoren (oder Erfindung neuer Operatoren) und durch Auswahl beliebiger Zugehörigkeitsfunktionen

A Anhang

Tabelle 2.2: Zusammenfassung der wichtigsten t-Normen/t-Conormen		
	t-Norm: "$\cap$"- Operator	**t-Conorm:** "$\cup$"- Operator
ordinal		
	$min\{x, y\}$	$max\{x, y\}$
kardinal		
algebraisch	$x \cdot y$	$x+y-xy$
beschränkt	$max\{0, x+y-1\}$	$min\{1, x+y\}$
drastisch	x $falls\ y=1$ y $falls\ x=1$ $0\ sonst$	x $falls\ y=0$ y $falls\ x=0$ $1\ sonst$
parametrisiert		
Hamacher (1978) $0 \leq \lambda < \infty$	$\frac{xy}{\lambda+(1-\lambda)(x+y-xy)}$	$\frac{x+y-(2-\lambda)xy}{1-(1-\lambda)xy}$
Yager (1980a) $0 < \lambda < \infty$	$1-min\{1, ((1-x)^{\lambda}+(1-y)^{\lambda})^{1/\lambda}\}$	$min\{1, (x^{\lambda}+y^{\lambda})^{1/\lambda}\}$
Weber (1983) $-1 < \lambda < \infty$	$max\left\{0, \frac{x+y-1+\lambda xy}{1+\lambda}\right\}$	$min\{1, x+y+\lambda xy\}$
Dubois/Prade (1980b/82) $0 < \lambda < 1$	$\frac{xy}{max\{x, y, \lambda\}}$	$\frac{x+y-xy-min\{x, y, 1-\lambda\}}{max\{1-x, 1-y, \lambda\}}$
Frank (1979) $0 < \lambda < \infty$, $\lambda \neq 1$	$\log_{\lambda}\left[1+\frac{(\lambda^{x}-1)(\lambda^{y}-1)}{\lambda-1}\right]$	$1-\log_{\lambda}\left[1+\frac{(\lambda^{1-x}-1)(\lambda^{1-y}-1)}{\lambda-1}\right]$
Dombi (1982) $0 < \lambda < \infty$	$\left(1+\left(\left(\frac{1}{x}-1\right)^{\lambda}+\left(\frac{1}{y}-1\right)^{\lambda}\right)^{1/\lambda}\right)^{-1}$	$\left(1+\left(\left(\frac{1}{x}-1\right)^{-\lambda}+\left(\frac{1}{y}-1\right)^{-\lambda}\right)^{-1/\lambda}\right)^{-1}$
Schweizer/Sklar (1963) $-\infty < \lambda < \infty$, $\lambda \neq 0$	$max\{0, (x^{\lambda}+y^{\lambda}-1)^{1/\lambda}\}$	$1-max\{0, ((1-x)^{\lambda}+(1-y)^{\lambda}-1)^{1/\lambda}\}$
ordinale Summe von t-Normen und t-Conormen (Climestcu 1946)		
I höchstens abzählb. Indexmenge $]a_i, b_i[\subset[0,1]$ $]a_i, b_i[\cap]a_j, b_j[=\emptyset$ $\forall i \neq j \in I$ ***t**ᵢ/**s**ᵢ beliebige* t-Norm/Conorm	$a_i+(b_i-a_i)\boldsymbol{t_i}\left(\frac{x-a_i}{b_i-a_i}, \frac{y-a_i}{b_i-a_i}\right)$ wenn $x, y \in]a_i, b_i[$ für einige $i \in I$ $min\{x, y\}$ sonst	$a_i+(b_i-a_i)\boldsymbol{s_i}\left(\frac{x-a_i}{b_i-a_i}, \frac{y-a_i}{b_i-a_i}\right)$ wenn $x, y \in]a_i, b_i[$ für einige $i \in I$ $max\{x, y\}$ sonst

Tabelle 2.2: Zusammenfassung der wichtigsten t-Normen/t-Conormen, Buch: Unsicherheit, Unschärfe und rationales Entscheiden, Die Anwendung von Fuzzy-Methoden in der Entscheidungstheorie, Teil I: Grundlagen der Fuzzy-Mathematik, Notburga Ott

Tabelle 2.3: Wichtige Grenzwerte parametrischer Operatoren

	$\lambda \to -\infty$	$\lambda = -1$	$\lambda = 0$	$\lambda = 1$	$\lambda \to \infty$
Hamacher					
t-Norm			$\frac{alg_t(x,y)}{alg_s(x,y)}$	$alg_t(x,y)$	$dra_t(x,y)$
t-Conorm			$\frac{alg_s(x,y)-alg_t(x,y)}{1-alg_t(x,y)}$	$alg_s(x,y)$	$dra_s(x,y)$
Yager					
t-Norm			$dra_t(x,y)$	$bes_t(x,y)$	$min(x,y)$
t-Conorm			$dra_s(x,y)$	$bes_s(x,y)$	$max(x,y)$
Weber					
t-Norm		$dra_t(x,y)$	$bes_t(x,y)$		$alg_t(x,y)$
t-Conorm		$alg_s(x,y)$	$bes_s(x,y)$		$dra_s(x,y)$
Dubois/Prade					
t-Norm			$min(x,y)$	$alg_t(x,y)$	
t-Conorm			$max(x,y)$	$alg_s(x,y)$	
Frank					
t-Norm			$min(x,y)$	$alg_t(x,y)$	$bes_t(x,y)$
t-Conorm			$max(x,y)$	$alg_s(x,y)$	$bes_s(x,y)$
Schweizer/Sklar					
t-Norm	$min(x,y)$		$alg_t(x,y)$	$bes_t(x,y)$	$dra_t(x,y)$
t-Conorm	$max(x,y)$		$alg_s(x,y)$	$bes_s(x,y)$	$dra_s(x,y)$

Tabelle 2.3: Wichtige Grenzwerte parametrischer Operatoren, Buch: Unsicherheit, Unschärfe und rationales Entscheiden, Die Anwendung von Fuzzy-Methoden in der Entscheidungstheorie, Teil I: Grundlagen der Fuzzy-Mathematik, Notburga Ott

Tabelle 2.5: Zusammenfassung der wichtigsten kompensatorischen Operatoren	
arithmetisches Mittel	$\tilde{C}:=\frac{\tilde{A}+\tilde{B}}{2}$ mit $\mu_C=\frac{1}{2}(\mu_A+\mu_B)$
geometrisches Mittel	$\tilde{C}:=\sqrt{\tilde{A}\cdot\tilde{B}}$ mit $\mu_C=\sqrt{\mu_A\cdot\mu_B}$
min-max- Kompensations-Operator	$\tilde{C}:=\tilde{A}\kappa_\gamma\tilde{B}$ mit $\mu_C=(min(\mu_A,\mu_B))^{1-\gamma}\cdot(max(\mu_A,\mu_B))^\gamma,\qquad \gamma\in[0,1]$
konvexer min-max- Kompensations-Operator	$\tilde{C}:=\tilde{A}\kappa K_\gamma\tilde{B}$ mit $\mu_C=(1-\gamma)\,min(\mu_A,\mu_B)+\gamma\,max(\mu_A,\mu_B),\qquad \gamma\in[0,1]$
algebraischer Kompensations-Operator Verallgemeinerung	$\tilde{C}:=\tilde{A}\cdot_\gamma\tilde{B}$ mit $\mu_C=(\mu_A\cdot\mu_B)^{1-\gamma}\cdot(\mu_A+\mu_B-\mu_A\cdot\mu_B)^\gamma,\qquad \gamma\in[0,1]$ $\tilde{C}:=\tilde{A}_1\cdot_\gamma\tilde{A}_2\cdot_\gamma\ldots\cdot_\gamma\tilde{A}_n$ mit $\mu_C=\left(\prod_{i=1}^{n}\mu_i\right)^{1-\gamma}\cdot\left(1-\prod_{i=1}^{n}(1-\mu_i)\right)^\gamma,\qquad \gamma\in[0,1]$
$u\tilde{n}d$ - Verknüpfung	$\tilde{C}:=_{u\tilde{n}d}\tilde{A}_i$ mit $\mu_C=\delta\,min(\mu_1,\ldots,\mu_m)+(1-\delta)\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\mu_i,\qquad \delta\in[0,1]$ $\tilde{A}_i,\ i=1,\ldots,m$ Fuzzy-Mengen auf X
$od\tilde{e}r$ - Verknüpfung	$\tilde{C}:=_{od\tilde{e}r}\tilde{A}_i$ mit $\mu_C=\delta\,max(\mu_1,\ldots,\mu_m)+(1-\delta)\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\mu_i,\qquad \delta\in[0,1]$ $\tilde{A}_i,\ i=1,\ldots,m$ Fuzzy-Mengen auf X

Tabelle 2.5: Zusammenfassung der wichtigsten kompensatorischen Operatoren, Buch: Unsicherheit, Unschärfe und rationales Entscheiden, Die Anwendung von Fuzzy-Methoden in der Entscheidungstheorie, Teil I: Grundlagen der Fuzzy-Mathematik, Notburga Ott

B Literaturverzeichnis

(1)	Notburga Ott	Unsicherheit, Unschärfe und rationales Entscheiden, Die Anwendung von Fuzzy-Methoden in der Entscheidungstheorie, Teil I: Grundlagen der Fuzzy-Mathematik	Physika-Verlag, Heidelberg, 2001
(2)	Michael Smithson, Jay Verkuilen	Fuzzy Set Theory Applications in the Social Sciences, Series: Quantitative Applications in the Social Sciences	SAGE Publications, Thousand Oaks, California, 2006
(3)	Rudolf Kruse	Fuzzy-Systeme	Teubner, Stuttgart, 1993

C Online-Quellenverzeichnis

(1)	http://de.wikipedia.org/wiki/Fuzzy-Logik	Fuzzylogik		22.06.09
(2)	http://de.wikipedia.org/wiki/K%C3%BCnstliche_Intelligenz	Künstliche Intelligenz		22.06.09
(3)	http://de.wikipedia.org/wiki/T-Norm	T-Norm		22.06.09
(4)	http://www.bw.fh-deggendorf.de/kurse/ws1/skripten/skript2.pdf	Unscharfe Menge - Fuzzy-Sets		22.06.09
(5)	http://www.mathe.tu-freiberg.de/~dempe/Skripte/Unscharfe%20Optimierung/FuzzyZahlen.pdf	Fuzzy Aritmetik, Fuzzy-Zahlen und Erweiterungsprinzip	Stephan Dempe, TU Bergakademie Freiberg, Fakultät für Mathematik und Informatik, 09596 Freiberg	22.06.09
(6)	http://www.stud.fernuni-hagen.de/q1471341/nicole-m/Studium/1915/1915.html	Fuzzy-Inferenz: Max-Min-Inferenz, Max-Prod-Inferenz	Nicole Rauch, Fern-Universität, Fachbereich Informatik, Hagen	22.06.09
(7)	http://www.stud.fernuni-hagen.de/q1471341/nicole-m/Studium/1915/node8.html#SECTION00041000000000000000	Fuzzy-Inferenz: Max-Min-Inferenz, Max-Prod-Inferenz	Nicole Rauch, Fern-Universität, Fachbereich Informatik, Hagen	22.06.09
(8)	http://www.zeit.de/2000/29/200029.fuzzy-logik_.xml	Präzise Unschärfe	Annette Lessmöllmann, DIE ZEIT, 2000	22.06.09
(9)	http://wwwmath.uni-muenster.de/SoftComputing/lehre/material/wwwfuzzyscript/fseinl.html	Einführung in die Fuzzy-Systeme	Peter Wimber, Ralf Wältring, Universität Münster, 2000	22.06.09
(10)	http://www.wi.uni-muenster.de/improot/is/pub_imperia/doc/1794.pdf	Grundsätze ordnungsmäßiger Modellierung - Über Kontruktivisten, Handels-H's und Referenzmodelle	Prof. Dr. Jörg Becker, Dipl.-Wirt. Inform. Lars Algermissen, Lehrstuhl für Wirtschaftsinformatik und Informationsmanagement Institut für Wirtschaftsinformatik Universität Münster	22.06.09
(11)	http://www.informatik.uni-hamburg.de/Info/Presse/zadeh.shtml	Präzise Unschärfe	Annette Lessmöllmann, DIE ZEIT 2000 Nr. 29	22.06.09