Entscheidungstheorie

Prof. Dr. Th. Augustin

16. April 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Charakterisierung der Entscheidungstheorie als Theorie des rationalen Entscheidens unter Unsicherheit

1.2 Die Grundform eines datenfreien Entscheidungsproblems (No-data-Problem)

Def. 1.1 (Datenfreies Entscheidungsproblem)

Ein *datenfreies Entscheidungsproblem* (no-data-problem) in Nutzenform (Verlustform) ist ein Tripel $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$ bzw. $(\mathbb{A}, \Theta, l(\cdot))$, bestehend aus

- einer Menge $\mathbb{A}$ („*Aktionenmenge*") ,

- einer Menge Θ („*Zustandsmenge*“)

- und einer Abbildung („*Nutzenfunktion*“) (u $\triangleq$ utility)

$$\begin{aligned} u \,:\, \mathbb{A} \times \Theta &\to \mathbb{R} \\ (a, \vartheta) &\mapsto u(a, \vartheta) \end{aligned} \tag{1.1}$$

bzw. einer Abbildung („*Verlustfunktion*“) (l $\triangleq$ loss)

$$\begin{aligned} l \,:\, \mathbb{A} \times \Theta &\to \mathbb{R} \\ (a, \vartheta) &\mapsto l(a, \vartheta) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Bsp. 1.2 (Das „Omelettenproblem“ von Savage)

Bem. 1.3 (Konsequenzenfunktion)

Für manche Anwendungen ist es sinnvoll, einen Schritt dazwischenzuschalten und – bei gegebenem $\mathbb{A}$ und Θ – zunächst eine *Konsequenzenfunktion*

$$\begin{aligned} c : \mathbb{A} \times \Theta &\to \mathcal{C} \\ (a, \vartheta) &\mapsto c(a, \vartheta) \end{aligned}$$

(mit $\mathcal{C}$ ist die Menge potentieller Konsequenzen) zu betrachten und darauf eine Nutzenbewertung

$$\begin{aligned} u_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} &\to \mathbb{R} \\ c &\mapsto u_{\mathcal{C}}(c) \end{aligned}$$

bzw. eine Verlustbewertung

$$\begin{aligned} l_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} &\to \mathbb{R} \\ l &\mapsto l_{\mathcal{C}}(c) \end{aligned}$$

festzulegen.

$u(\cdot)$ und $l(\cdot)$ ergeben sich dann durch Superposition beider Funktionen als

$$u(a, \vartheta) = u_{\mathcal{C}}(c(a, \vartheta))$$

bzw.

$$l(a, \vartheta) = l_{\mathcal{C}}(c(a, \vartheta))$$

Bem. 1.4 (zu Nutzen- und Verlustfunktionen)

- In Definition (1.1) haben Verlust- und Nutzenfunktion (als Funktionen der Gestalt $\mathbb{A} \times \Theta \to \mathbb{R}$) formal genau dieselbe Struktur. Es muss also jeweils dazugesagt werden, was vorliegen soll. (Nutzen: Je mehr, umso besser; Verlust: Je weniger, umso besser)

- Diese Uneindeutigkeit liegt nicht zuletzt daran, dass man eigentlich mit *Präferenzenordnungen* auf der Menge der Konsequenzen als grundlegende Entität arbeiten müßte. Die Nutzentheorie lehrt, wie man unter welchen Bedingungen aus Präferenzenordnungen einen kardinalen (metrischen) Nutzen konstruiert. (Hier nur eventuell am Ende der Vorlesung betrachtet.)

- Durch Multiplizieren mit (-1) kann man dann jede Nutzenfunktion $u(\cdot)$ in eine, genau diesselbe Präferenzenordnung widerspiegelnde Verlustfunktion umwandeln. Daher wird im Folgenden meist nur entweder von Nutzen- oder von Verlustfunktion gesprochen.

- Die Kardinalität das Nutzens wird (zunächst) nicht bezweifelt; man kann also mit den Nutzeneinheiten wie gewohnt rechnen. Insbesondere wird dem Folgenden eine Äquivalenz von Nutzen- und Verlustsicht unterstellt.

Bem. 1.5 (Notation im endlichen Fall)

Im Falle einer endlichen Aktionenmenge und einer endlichen Zustandsmenge wird folgende Notation verwendet:

$$\begin{array}{l} \mathbb{A} = \{a_1, ..., a_i, ..., a_n\} \\ \Theta = \{\vartheta_1, ..., \vartheta_j, ..., \vartheta_m\} \end{array} \tag{1.3}$$

(also $|\mathbb{A}| = n,\ |\Theta| = m;\ i$ Laufindex in $\mathbb{A}$, j Laufindex in Θ)
Nutzenfunktion, Verlustfunktion und Konsequenzenfunktion können dann als Matrizen $(u_{ij})_{\substack{i=1,...,n \\ j=1,...,m}}$, $(l_{ij})_{\substack{i=1,...,n \\ j=1,...,m}}$, $(c_{ij})_{\substack{i=1,...,n \\ j=1,...,m}}$ dargestellt werden.

Zum Beispiel:

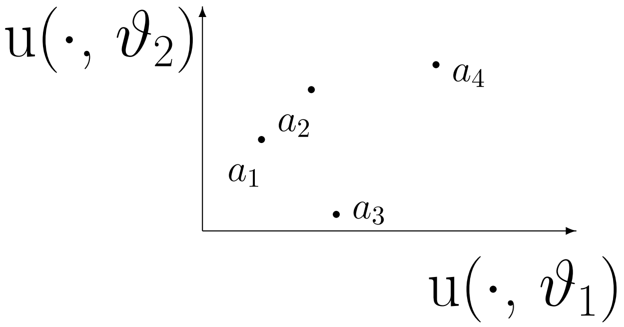
$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & \vartheta_1 & \vartheta_2 & .. & .. & \vartheta_m \\
\hline
a_1 & u_{11} & u_{12} & .. & .. & u_{1m} \\
a_2 & u_{21} & u_{22} & .. & .. & u_{2m} \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. \\
.. & .. & .. & u_{ij} & .. & .. \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. \\
a_n & u_{n1} & u_{n2} & .. & .. & u_{nm}
\end{array}
\tag{1.4}
$$

Man spricht dann von Nutzen*tafel*, Verlust*tafel* oder Konsequenzen*tafel*.

Einbettung in den $\mathbb{R}^m$:
Jedes Element $a_i \in \mathbb{A}$ kann dann mit dem zugehörigen *Nutzenvektor*

$$\vec{u}(a_i) = (u_{i1}, u_{i2}, ..., u_{ij}, ..., u_{im})^T \in \mathbb{R}^m \tag{1.5}$$

identifiziert werden.
Ist $m = 2$ oder $m = 3$, so ist ferner eine graphische Darstellung möglich:



Bem. 1.6 (Semantik des datenfreien Entscheidungsproblems)

Abstrahiert man bei einem konkreten Entscheidungsproblem und fasst es in die Form $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$ bzw. $(\mathbb{A}, \Theta, l(\cdot))$ laut Definition 1.1, so sind damit implizit die folgende Reihe von grundsätzlichen Annahmen verbunden, die in der jeweiligen Anwendung kritisch zu hinterfragen sind:

a) $\mathbb{A}$ sei bekannt.

b) Θ sei bekannt (Close-World-Assumption).

c) Die Ergebnisse (Konsequenzen) seien eindeutig, d.h. aus dem Zusammenspiel jedes Elements a von $\mathbb{A}$ und $\vartheta \in \Theta$ ergibt sich eine eindeutige bestimmte Konsequenz $c(a, \vartheta)$. Dabei können Konsequenzen durchaus Wahrscheinlichkeitsverteilungen sein.

d) Es läßt sich eine eindeutig bestimmte Nutzen-/Verlustfunktion angeben, die die individuellen Präferenzen des Entscheidungsträgers widerspiegelt.

   * Vgl. Bemerkung 1.4: Konstruktion von kardinalen (reellwertigen) Nutzenfunktionen aus bestimmte Bedingungen erfüllenden Präferenzordnungen → „Nutzentheorie“

* Vorsicht: Bei monetären Konsequenzen ist im Allgemeinen der Nutzen nicht identisch mit (oder linear in der) Geldmenge. Nur wenn alle im Entscheidungsproblem betrachteten Geldmengen weit unterhalb des tatsächlichen Vermögensstandes sind, ist die Nutzenfunktion (praktisch) linear in den Geldbeträgen. Dies ist v.a. beim Berechnen von erwarteten Nutzen/Verlusten wichtig.

e) Aktionen und Zustände seien wertfrei. (Eventuelle Bewertungen müssen in die Ergebnisse und damit in die Nutzenfunktion eingebaut werden.)

f) Umwelt nicht beeinflußbar: „*Handlungsunabhängigkeit der Zustände*“

Gegebenenfalls Strategien („Implikationssschema“) definieren (Festlegung der Umweltzustände ist keineswegs immer trivial!)

g) Typ der Unsicherheit bekannt (ob Bayessituation oder Unsicherheit im engeren Sinn)(bzw. später dann Verallgemeinerung)

h) Keine zusätzliche Information (außer Wahrscheinlichkeit bei Bayessituation). Informationsgewinnung über Strategien formulieren $\rightarrow$ Statistische Entscheidungstheorie

i) Einmalige Wahl der Entscheidung, keine Korrekturen

j) Keine Wiederholung der Entscheidungssituation (wiederholte Entscheidung als eine Entscheidungsstrategie formulieren)

1.3 Typische Beispiele

1.3.1 Das Ausflugsproblem von Chernoff & Moses (1959)

(in einer Adaption von Ferschl)

- Mr. Nelson möchte morgen eine Bergwanderung unternehmen, und zwar in einer Jahreszeit, in der man mit dem plötzlichen Einfallen von Schlechtwetter zu rechnen hat

- **Handlungsmöglichkeiten:**

  a_1 := leichte Bekleidung mitnehmen
  a_2 := leichte Bekleidung plus Regenschirm mitnehmen
  a_3 := wetterfeste, warme Bekleidung plus Regenschirm mitnehmen

- Die **relevanten Fakten** bzw. **Zustände** sind

θ_1 := schönes Wetter am Ausflugstag
θ_2 := schlechtes Wetter am Ausflugstag

- Nutzentafel für Mr. Nelson:

	θ_1	θ_2
a_1	5	0
a_2	3	1
a_3	2	3

Die Bewertungen werden als Nutzen interpretiert
Original: Verluste

Betrachtet man nun zusätzlich die Aktion a_4: 'leichte Bekleidung und defekten Regenschirm mitnehmen' mit $u(a_4, \vartheta_1) = 3, u(a_4, \vartheta_2) = 0$, so wäre es unvernünftig a_4 zu wählen, denn a_2 ist immer besser.
Man sagt: a_2 dominiert a_4 strikt. Das sog. Dominanzprinzip (vgl. Kap. 2.0) legt fest, dass strikt dominierte Aktionen nicht optimal sein sollen.

Potentielle datenbasierte Zusatzinfo ($\rightarrow$ später): Barometerablesung

1.3.2 Teilnahme an einer Lotterie

Gegeben sei eine Urne mit

g grünen
b blauen
r restlichen

Kugeln. Man kann

a_1 nicht spielen
a_2 zum Preis von c_g auf grün setzen
a_3 zum Preis von c_b auf blau setzen.

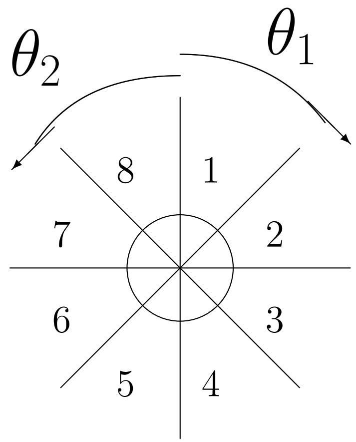
Nun wird eine Kugel zufällig gezogen. Ist sie grün (bzw. blau), so erhält man, wenn man auf grün (bzw. blau) gesetzt hat, w_g bzw. w_b (w: win), wobei die Beträge so klein seien, dass die Linearität des Nutzens in der Geldmenge gewährleistet sei.

$\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ mit
θ_1 gezogene Kugel ist grün
θ_2 gezogene Kugel ist blau
θ_3 gezogene Kugel hat sonstige Farbe

Für später wichtig: Sind g,b,r bekannt, so liegt eine Unsicherheitssituation vom Typ I (Risikosituation (i.e.S.)) vor!

1.3.3 „Kuchenteilen“

Gegeben sei ein Kuchen aus 8 durchnummerierten gleich großen Stücken.



- Der Entscheidungsträger wählt ein Stück $z, z \in \{1, \ldots 7\}$, bei dem der Kuchen geteilt wird.

- Es gebe zwei Umweltzustände: θ_1 und θ_2. Tritt θ_1 ein, so erhält der Entscheidungsträger die Stücke 1 bis z, bei θ_2 hingegen die Stücke $z+1$ bis 8.

	θ_1	θ_2
1	1	7
2	2	6
3	3	5
4	4	4
5	5	3
6	6	2
7	7	1

- Es wird hier noch nichts vorausgesetzt, wie die Umweltzustände eintreten. Werden sie z.B. durch einen Gegenspieler erzeugt, so erhält man ein typisches Beispiel für die Situation des strategischen Spiels, also für Typ II - Unsicherheit

1.3.4 Investitionsproblem

Ein Unternehmen steht vor der Entscheidung, eine Marketing-Investition zu tätigen. Ihr Erfolg hängt von der Konjunkturlage im nächsten Halbjahr ab.

- **Aktionen:**

a_1 := Investition tätigen

a_2 := Investition nicht tätigen

- **Zustände:**

θ_1 := Besserung der Konjunktur

θ_2 := Stagnation

θ_3 := Konjunktur fällt

1.3.5 Aktienkauf (natürlich stark vereinfacht)

1.3.6 Einbettung stat. Tests in die Entscheidungstheorie

1.3.7 Parameterschätzung, Übungsaufgabe

1.4 Randomisierte Aktionen, Konvexität

1.4.1 Konvexität

a) Konvexe Mengen

Def. 1.7 (konvexe Mengen)

Seien $\mathbb{V}$ ein Vektorraum und $z_1, \ldots, z_n$ Elemente von $\mathbb{V}$.

a) Mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \lambda_\ell \leq 1, \ell = 1, \ldots, n$, und $\sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell = 1$ sowie $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{V}$ heißt

$$z := \lambda_1 \cdot z_1 + \lambda_2 \cdot z_2 + \ldots + \lambda_n \cdot z_n \tag{1.6}$$

Konvexkombination von $z_1 \ldots z_n$.

b) Für $x, y \in \mathbb{V}$ heißt die Menge

$$[x, y] := \{\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y | 0 \leq \lambda \leq 1\} \tag{1.7}$$

aller Konvexkombinationen von x und y *Verbindungsstrecke* zwischen x und y.

c) Eine Teilmenge $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{V}$ heißt *konvex*, wenn für alle $z_1, z_2 \in \mathcal{M}$ gilt:

$$z_1 \in \mathcal{M}, z_2 \in \mathcal{M} \Rightarrow [z_1, z_2] \subseteq \mathcal{M}\,.$$

b) Mischungen und Verteilungen

Bem. 1.9 (Mischungen von Verteilungen)

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Meßraum und $\mathcal{P}$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

Gegeben seien q Elemente $p_1(\cdot), \ldots, p_q(\cdot) \in \mathcal{P}$ (also Wahrscheinlichkeitsmaße) und reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ mit $0 \leq \lambda_\ell \leq 1,\ \ell = 1, \ldots, q$, und $\sum_{\ell=1}^{q} \lambda_\ell = 1$.

Definiert man die *Mischung* $\bar{p}(\cdot)$ von $p_1(\cdot), \ldots, p_q(\cdot)$ vermöge

$$\bar{p}(A) = \sum_{\ell=1}^{q} \lambda_\ell p_\ell(A), \quad A \in \mathcal{A}, \tag{1.8}$$

so ist $\bar{p}(\cdot)$ wieder ein Element von $\mathcal{P}$. Die Menge $\mathcal{P}$ ist folglich konvex.

Haben $p_1(\cdot)$, ..., $p_q(\cdot)$ die (ν)-Dichten $f_1(\cdot)$, ..., $f_q(\cdot)$, so hat $\overline{p}(\cdot)$ die (ν)-Dichte

$$\overline{f}(\cdot) = \sum_{\ell=1}^{q} \lambda_\ell \cdot f_\ell(\cdot). \tag{1.9}$$

Beweis: Übungsaufgabe

Man beachte, dass im Allgemeinen für $\mathcal{P}$ nicht eine Standardklasse von Verteilungen gewählt werden kann. Zum Beispiel die Menge aller Normalverteilungen ist nicht abgeschlossen gegenüber Mischungen. Dies mag zunächst enttäuschen, gewährt aber andererseits große Flexibilität in der Modellierung, da man durch Mischen eben sehr komplexe Formen erzeugen kann.

c) Konvexe Hülle, konvexe Polyeder

Def. 1.10 (Konvexe Hülle)

Sei $\mathcal{M}$ eine beliebige Teilmenge von $\mathbb{V}$.

a) Der Schnitt aller konvexen Obermengen von $\mathcal{M}$ heißt *konvexe Hülle*.
(Die konvexe Hülle von $\mathcal{M}$ ist also die „kleinste konvexe Menge, die $\mathcal{M}$ umfasst".)
Schreibweise: $\operatorname{conv}(\mathcal{M})$

b) Ist $\mathcal{M}$ endlich, so heißt $\operatorname{conv}(\mathcal{M})$ auch *konvexes Polyeder (Polytop)*.

Bem. 1.11

Polyedrische Menge: Schnitt endlich vieler „Halbräume“.
Konvexes Polyeder : beschränkte polyedrische Menge
Der Begriff „konvexes Polyeder“ wird in der Literatur nicht ganz einheitlich gebraucht. Gelegentlich werden alle Mengen, die sich als Schnitt endlich vieler Halbräume darstellen lassen als konvexe Polyeder bezeichnet.
Die Vorlesung folgt der Konvention, solche Mengen als polyedrische Mengen zu bezeichnen. Man kann zeigen, dass ein Polyeder im Sinne der Vorlesung dann genau eine polyedrische Menge ist, die zusätzlich beschränkt ist. Im $\mathbb{R}^k$ werden die die Halbräume begrenzenden Hyperebenen als Begrenzungslinien bezeichnet.

Proposition 1.12 (Andere Charakterisierung der konvexen Hüll

Die konvexe Hülle $\mathrm{conv}(\mathcal{M})$ ist die Menge aller Konvex-Kombinationen von Punkten aus $\mathcal{M}$:

$$\mathrm{conv}(\mathcal{M}) = \left\{ \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell z_\ell \middle| \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell = 1, \quad 0 \le \lambda_\ell \le 1, \quad z_\ell \in \mathcal{M}, \quad \ell = 1, \ldots, n \right\}$$

Bsp. 1.15 (nach Büning / Naeve / Trenkler / Waldmann)
(2000, p. 327f, 333f)

Ein Unternehmer stelle die Produkte P_1 und P_2 her. Die dazu benötigten Mittel sind wie folgt beschränkt:

Maschine:	maximal 1200h
Rohstoffe:	maximal 3000 Mengeneinheiten (ME)
Arbeitskraft:	maximal 1255h

und verteilen sich wie folgt auf je eine Mengeneinheit des Produkts $P_i, i = 1, 2$

Maschine	3h	2h
Rohstoff	5ME	10ME
Arbeitskraft	0h	0.5h

a) Beschreiben Sie die Menge aller möglichen Produktionsmengen P_1 und P_2, die mit den vorgegebenen Beschränkungen vertäglich sind!

b) Veranschaulichen Sie Ihr Ergebnis graphisch!

c) Welche Produktionsmengen nützen die vorhandenen Produktionsfaktoren voll aus?

d) Extremalpunkt

Bem. 1.16

Man kann zeigen: Die Eckpunkte eines konvexen Polyeders $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^k$, sind alle Punkte, die folgende beide Bedingungen erfüllen:

i) x ist ein Schnittpunkt von (mindestens) k Begrenzungslinien

ii) $x \in \mathcal{M}$

Satz 1.19 (Extremalpunkte)

a) Sei $\mathcal{M}$ konvex, nichtleer, abgeschlossen und beschränkt.
Dann gilt:

a1) $\mathcal{E}(\mathcal{M}) \neq \emptyset$

a2) Jede lineare Funktion $f : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ nimmt ihr Maximum und ihr Minimum auf $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ an.

b) Ein konvexer Polyeder () ist die konvexe Hülle seiner Extremalpunkte.

Bem. 1.21 (zu a2))

* Der Punkt a2) ist von extremer praktischer Bedeutung; insbesondere bildet er die Grundlage der linearen Optimierung (siehe später), also des Optimierens linearer Funktionen unter linearen Nebenbedingungen.

* Für die Statistik ist a2) auch deshalb interessant, da der Erwartungswert eine lineare Funktion (bzw. ein lineares Funktional) ist.

1.4.2 Randomisierte Aktionen

Def. 1.22 (randomisierte (gemischte Aktionen))

Sei $\mathbb{A}$ die Aktionenmenge eines datenfreien Entscheidungsproblems $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$ (und $\sigma(\mathbb{A})$ eine σ-Algebra über $\mathbb{A}$, die alle Einpunktmengen $\{a\} \in \mathbb{A}$ enthält.)
Dann heißt jedes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{A}, \sigma(\mathbb{A}))$ *randomisierte (gemischte)* Aktion.
Die Menge aller randomisierten Aktionen auf $(\mathbb{A}, \sigma(\mathbb{A}))$ werde mit $\mathcal{M}^{\sigma(\mathbb{A})}(\mathbb{A})$ bezeichnet. Ist klar, welche σ-Algebra verwendet wird, so schreibt man kurz $\mathcal{M}(\mathbb{A})$.

Korollar 1.23

$\mathcal{M}^{\sigma(\mathbb{A})}$ ist konvex.

Beweis:

Bem. 1.24 (Zur Semantik einer randomisierten Aktion)

Sei $\mathbb{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Dann besteht die randomisierte Aktion $\widetilde{a}(\cdot) \in \mathcal{M}(\mathbb{A})$ aus folgender Handlungsvorschrift:
Führe ein Zufallsexperiment auf $\{1, \ldots, n\}$ mit $p(\{i\}) = \widetilde{a}(\{a_i\}), \quad i = 1, \ldots, n$, durch und wähle Aktion a_i genau dann, wenn i eintritt.
D.h. es wird mit Wahrscheinlichkeit $\widetilde{a}(\{a_i\})$ die Aktion a_i gewählt.
Man schreibt oft

$$\widetilde{a} = \begin{bmatrix} a_1, & \ldots, & a_n \\ \widetilde{a}(\{a_1\}), & \ldots, & \widetilde{a}(\{a_n\}) \end{bmatrix}.$$

Wählt man $\mathcal{M}(\mathbb{A})$ als Aktionenmenge, so kann man darauf aufbauend ein eigenes Entscheidungsproblem formulieren. Dazu ist es noch nötig, den Nutzen/Verlust geeignet zu definieren (als Erwartungswert).

Def. 1.25 (gemischte Erweiterung)

Gegeben sei ein datenfreies Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$ und eine geeignete σ-Algebra $\sigma(\mathbb{A})$ auf $\mathbb{A}$. Dann heißt das datenfreie Entscheidungsproblem $(\mathcal{M}^{\sigma(\mathbb{A})}(A), \Theta, \widetilde{u}(\cdot))$ mit

$$\begin{aligned} \widetilde{u}(\cdot) : \mathcal{M}^{\sigma(\mathbb{A})} \times \Theta &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\widetilde{a}, \vartheta) \quad &\longrightarrow \widetilde{u}(\widetilde{a}, \vartheta) \end{aligned}$$

und

$$\widetilde{u}(\widetilde{a}, \vartheta) := \mathbb{E}_{\widetilde{a}}[u(a, \vartheta)] = \int u(a, \vartheta) \, \mathrm{d}\widetilde{a}(a) \tag{1.10}$$

die *gemischte Erweitung* von $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$ (bzgl. $\sigma(\mathbb{A})$).

Bem. 1.26 (zu Def.1.25)

- Die Verwendung des allgemeinen Maßintegrals erlaubt die simultane Betrachtung des stetigen und diskreten Falls sowie die Berücksichtigung gemischt stetig/diskreter Verteilungen. Insbesondere gilt:

  Ist $\widetilde{a}(\cdot)$ ein stetiges (Lebesgue-)Wahrscheinlichkeitsmaß mit Dichte $\widetilde{f}(\cdot)$, so ist

$$\widetilde{u}(\widetilde{a}, \vartheta) = \int_{\mathbb{A}} u(a, \vartheta) \widetilde{f}(a)\, da\,. \tag{1.11}$$

  Ist $\widetilde{a}(\cdot)$ diskret mit Wahrscheinlichkeitsfunktion $\widetilde{p}(\cdot)$ auf $\mathbb{A} = \{a_1, a_2, \ldots,\}$, so ist

$$\widetilde{u}(\widetilde{a}, \vartheta) = \sum_{i=1}^{n} u(a_i, \vartheta) \widetilde{p}(a_i)\,. \tag{1.12}$$

- Beachte Formel (1.10) ist eine definitorische Festlegung, die zwar plausibel ist, aber keineswegs logisch zwingend.

- Die gemischte Erweiterung ist also wieder ein datenfreies Entscheidungsproblem. Man braucht folglich bei allgemeinen Definitionen und Sätzen nicht zu unterscheiden, ob ein „ursprüngliches Entscheidungsproblem“ vorliegt oder die zugehörige gemischte Erweiterung.

Bem. 1.27 (reine Aktionen)

Die randomisierten Aktionen der Form $\widetilde{a}(\cdot) = \delta_{\{a\}}, \delta_{\{a\}} \in \mathbb{A}$ (Dirac-Maß = Einpunktmaß in der Menge $\{a\}$) werden als *reine Aktionen* bezeichnet und mit $a \in \mathbb{A}$ identifiziert.

Aufgabe 11

Bem. 1.28 (Vom Sinn und Unsinn randomisierter Aktionen)

Bem. 1.30 (Geometrische Deutung randomisierter Aktionen)

- $|\Theta| = m < \infty$

- a_i wurde mit Nutzenvektor $(u(a_i, \vartheta_1), u(a_i, \vartheta_2), ..., u(a_i, \vartheta_m))^T = (u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{im})^T$ identifiziert (vgl. Bem. 1.6)

- $\widetilde{a} = \begin{bmatrix} a_1 & \ldots & a_i & \ldots & a_n \\ p_1 & \ldots & p_i & \ldots & p_n \end{bmatrix}$ mit $p_i = p(\{a_i\})$ hat definitionsgemäß (vgl. Def. 1.25) den Nutzenvektor

$$\vec{u} = (\sum_{i=1}^{n} p_i u_{i1}, \sum_{i=1}^{n} p_i u_{i2}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} p_i u_{im})^T \tag{1.13}$$

Durch die Identitizierung von randomisierten Aktionen mit ihrem Nutzenvektor sind dann randomisierte Aktionen und Aktionen, die ja mit ihrem Nutzenvektor identifiziert wurden, Objekte vom demselben Typ, nämlich Punkte des $\mathbb{R}^m$.
Es ist (Rechenregel für Vektoren)

$$\widetilde{a}\widehat{=}\vec{u} = p_1 a_1 + p_2 a_2 + \ldots + p_n a_n$$

Also ist jede randomisierte Aktion eine Konvexkombination von reinen Aktionen und umgekehrt.

Satz 1.32 (randomisierte Aktionen als konvexe Hülle)

Sind Θ und $\mathbb{A}$ endlich, so gilt $\mathcal{M}(\mathbb{A}) \overset{(1)}{=} \mathrm{conv}(\mathbb{A})$. Damit ist also $\mathcal{M}(\mathbb{A})$ ein konvexes Polyeder.

1.4.3 Lineare Optimierung

a) Grundlegendes

- *Optimierung*: Suche Extremstellen (Minimum, Maximum) einer Funktion $f : D_1 \to \mathbb{R}$, einer Menge $D_2 \subseteq D_1$. Dabei

  * wird jetzt $f(\cdot)$ meist als *Zielfunktion* bezeichnet, und

  * D_2 ergibt sich über „*Restriktionen, Nebenbedingungen*“

- *lineare Optimierung, lineare Programmierung*:
  sowohl $f(\cdot)$ als auch die D_2 beschreibende Nebenbedingungen sind *linear* in den Komponenten („Variablen“) $\vec{x} \in D_1$

- *endliche lineare Optimierung*, $|m| < \infty$ hier im folgenden vorausgesetzt

  * $D_1 \subseteq \mathbb{R}^m$; $m \in \mathbb{N}$: die Anzahl der Variablen ist endlich.

  * die Anzahl der linearen Nebenbedingungen ist endlich. Damit ist D_1 eine polyedrische Menge bzw. meist ein konvexes Polyeder.

b) Typische Beispiele und Problemstellung

<u>Produktionsplanung</u>
Maximiere Gesamtgewinn aus verschiedenen Produkten unter Restriktionen an

- Produktmenge (Lagermenge, Transportmenge, Marktsättigung)

- Produktionskapazität

- Ressourcenmenge

bei als fest angenommenem Preis.

Etwa im Beispiel 1.15. Ist beispielsweise bekannt, dass je Mengeneinheit von Produkt 1 ein Gewinn von 3€ und bei Produkt 2 von 4€ pro Mengeneinheit, erzielt wird, so lautet der Ansatz zur Bestimmung des gewinnoptimalen Plans

Mischungsprobleme

Minimiere Kosten bei Einsatz verschiedener Ressourcen unter Nebenbedingungen an einzelne Komponenten (z.B. verschiedene Düngemittel mit verschiedenen Anteilen meherer Nährstoffe)

Investitionsplanung

Minimiere laufende Investitionskosten unter Bedingungen an Fertigungskapazität und Investitionsbudget.

<u>Transportoptimierung und Zuordnungsprobleme</u> führt auf ganzzahlige Probleme: hier nur am Rande

- Verteile Einheiten kostenoptimal unter Restriktionen an Einsatzbereiche (z.B. minimiere Fahrzeiten einer Menge von Notarztwägen an verschiedenen Orten unter der Bedingung, dass alle Einsatzorte bedient werden)

- verteile Servicekräfte auf verschiedene zu bedienende Bereiche optimal hinsichtlich der benötigten Einarbeitungszeit

c) Standard-Probleme und ihre Lösung

Def. 1.36 Standard-Minimum-Problem und Standard-Maximum Problem

Ein Optimierungsproblem der Form

$$\underset{(1\times n)}{c^T} \cdot \underset{(n\times 1)}{w} \to \min \tag{1.14}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \underset{(m\times n)}{A} \cdot \underset{(n\times 1)}{w} &\geq \underset{(m\times 1)}{b} \\ \underset{(n\times 1)}{w} &\geq \underset{(n\times 1)}{0} \end{aligned} \tag{1.15}$$

heißt Standard-Minimum-Problem [1] (in der Variablen $w = (w[1], \ldots, w[n])^T$ mit der Zielfunktion $c^T \cdot w$).
Jedes die Restriktionen (1.15) erfüllende $\bar{w}$ mit $c^T \cdot \bar{w} > -\infty$ heißt *zulässig* oder *zulässige Lösung (des Standard-Minimum-Problems)*.

Eine zulässige Lösung w^* heißt *Optimallösung*[2] des Standard-Minimum-Problems, wenn für jedes zulässige $\bar{w}$ gilt: $c^T \cdot \bar{w} \geq c^T \cdot w^*$.

Analog heißt ein Optimierungsproblem *Standard-Maximum-Problem (in der Variablen $w = (w[1], \ldots, w[n])^T$ mit der Zielfunktion $c^T \cdot w$)*, wenn es folgende Gestalt besitzt:

[1]Die in der Literatur verwendeten Bezeichnungsweisen sind sehr heterogen. Gleiche Begriffe können bei unterschiedlichen Autoren durchaus Verschiedenes bedeuten; dies gilt insbesondere für die Termini „Standard-Form" und „kanonische Form.

[2]Man beachte, daß hier nur von Zulässigkeit und Optimalität gesprochen wird, wenn der zugehörige Wert $c^T \cdot w$ endlich ist.

$$\underset{(1\times n)}{c^T} \cdot \underset{(n\times 1)}{w} \rightarrow \max \tag{1.16}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \underset{(m\times n)}{A} \cdot \underset{(n\times 1)}{w} &\leq \underset{(m\times 1)}{b} \\ \underset{(n\times 1)}{w} &\geq \underset{(n\times 1)}{0} \,. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Jedes die Restriktionen (1.17) erfüllende $\bar{w}$ mit $c^T \cdot \bar{w} < \infty$ heißt *zulässig* oder *zulässige Lösung* (des Standard-Maximum-Problems).

Eine zulässige Lösung w^* heißt *Optimallösung* des Standard-Maximum-Problems, wenn für jedes zulässige $\bar{w}$ gilt: $c^T \cdot \bar{w} \leq c^T \cdot w^*$.

Dabei wurde von folgenden *Konventionen* Gebrauch gemacht:

1. Bei einem Vektor $y \in I\!R^q$ bezeichnet $y[i]$ für jedes $i \in \{1, \ldots, q\}$ die i-te Komponente von y.

2. Für zwei Vektoren $y \in I\!R^q$ und $z \in I\!R^q$ sind die Relationen „$\leq$", „$\geq$" und „$=$" jeweils komponentenweise zu lesen. Beispielsweise gilt also:
$$y \leq z :\Longleftrightarrow y[i] \leq z[i], \qquad \forall i \in \{1, \ldots, q\}.$$

Bem. 1.37 Alle Probleme können auf die Standardformen gebracht werden.

Jede lineare Optimierungsaufgabe läßt sich als ein Standard-Minimum-Problem und als ein Standard-Maximum-Problem formulieren:

- Durch Multiplizieren mit (-1) können Maximierungsprobleme in Minimierungsprobleme und Restriktionen der Form „$\leq$" in Nebenbedingungen der Gestalt „$\geq$" umgewandelt werden (und umgekehrt).

- Gleichheitsbedingungen in den Nebenbedingungen lassen sich in zwei Ungleichungen auflösen.

- Auch mit negativen Variablen kann umgegangen werden; man schreibt sie als Differenz zweier nichtnegativer Variablen.

Typischerweise bieten aus diesem Grund Programmpakete meist nur eine bestimmte Form an. □

Proposition 1.38 (Zur Lösungsmenge linearer Programme)

Gegeben sei ein Standard-Minimum-Problem oder ein Standard-Maximum-Problem gemäß Definition 1.36. Dann gilt:

1. Ist die Menge aller zulässigen Lösungen beschränkt, so existiert genau dann eine Optimallösung w^*, wenn es ein zulässiges w_0 gibt.

2. Die Menge W^* aller Optimallösungen ist konvex und abgeschlossen. $\square$

Bem. 1.39

Man kann mit Hilfe der linearen Optimierung auch überprüfen, ob ein Ungleichungssystem

$$A \cdot w \leq b$$

eine Lösung hat.
Ersetzt man eine Komponente von b (z.B. $b[1]$) durch eine weitere Variable z und untersucht, ob das Problem

$$z \longrightarrow \min$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{lcl} a_{11} \cdot w[1] + a_{12} \cdot w[2] + \ \ldots \ -z & \leq & 0 \\ a_{12} \cdot w[2] + a_{22} \cdot w[2] + \ \ldots & \leq & b[2] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots & & \end{array}$$

eine Lösung kleiner gleich $b[1]$ hat.

Alternativ kann man eine künstliche, beschränkte Zielfunktion einführen und das Problem

$$v \longrightarrow \max$$

unter den Nebenbedingungen

$$A \cdot w \leq b$$

$$v \leq 1$$

betrachten.
Man erhält hier –theoretisch– sogar alle Lösungen.

Bem. 1.40 Berechnung von Optimallösungen

- Zur Lösung linearer Optimierungsprobleme steht eine Vielzahl von Algorithmen zur Verfügung. Das älteste und bekannteste Verfahren ist das so genannte *Simplex-Verfahren*, das auch in allen gängigen Programmpaketen implementiert ist.
  Es benutzt – wie seine vielen Abwandlungen (und Weiterentwicklungen) – Satz 1.19 und sucht in „geschickter Weise" die Extremalpunkte des die Restriktionen beschreibenden Polyeders ab.
  Daneben gibt es noch eine Reihe von sehr effizienten innere-Punkte-Methoden $\longrightarrow$ Literatur.

- Bei zwei (oder drei) Variablen ist auch eine graphische Lösung möglich.

d) Dualität I

Jedem linearen Programm in Standardform kann ein sogenanntes *duales Programm* zugeordnet werden. Es entsteht dadurch, daß man von einem Minimierungsproblem zu einem Maximierungsproblem (und umgekehrt) übergeht und dabei für jede Restriktion des ursprünglichen Problems eine neue Variable einführt. Als neue Koeffizientenmatrix der Restriktionen dient die Transponierte der ursprünglichen Koeffizientenmatrix. Ferner sind die Rollen von c und b zu vertauschen; c wird zum Spaltenvektor der Restriktionen, während nun b zu einem Faktor des die Zielfunktion bestimmenden Skalarprodukts wird.

Def. 1.42 Duale Standard-Minimum- und Standard-Maximum-Probleme

Gegeben sei das Standard-Minimum-Problem in der Variablen w. Dann heißt die Optimierungsaufgabe

$$\underset{(1\times m)}{b^T} \cdot \underset{(m\times 1)}{u} \to \max \tag{1.18}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \underset{(n\times m)}{A^T} \cdot \underset{(m\times 1)}{u} &\leq \underset{(n\times 1)}{c} \\ \underset{(m\times 1)}{u} &\geq \underset{(m\times 1)}{0} \end{aligned} \tag{1.19}$$

das *zugehörige duale Standard-Maximum-Problem*. In diesem Zusammenhang wird dann das ursprüngliche Problem als *primales* Standard-Minimum-Problem bezeichnet.

Analog wird bei gegebenem Standard-Maximum-Problem in der Variablen w die Optimierungsaufgabe

$$\underset{(1\times m)}{b^T} \cdot \underset{(m\times 1)}{u} \to \min \tag{1.20}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \underset{(n\times m)(m\times 1)}{A^T \cdot u} &\geq \underset{(n\times 1)}{c} \\ \underset{(m\times 1)}{u} &\geq \underset{(m\times 1)}{0} \end{aligned} \tag{1.21}$$

als *zugehöriges duales Standard-Minimum-Problem* bezeichnet. Das ursprüngliche Problem heißt dann *primales* Standard-Maximum-Problem. □

Der Zusammenhang zwischen Primalprogramm und Dualprogramm geht über die oben beschriebene, äußere Komplementarität weit hinaus:

Proposition 1.43 Zur Beziehung zwischen Primal-Problem und Dual-Problem

Gegeben sei das Standard-Minimum-Problem (1.14f.) in der Variablen w und das zugehörige duale Standard-Maximum-Problem (1.18f.) in der Variablen u. Dann gilt:

1. Das duale Standard-Minimum-Problem zu (1.18f.) ist wieder das ursprüngliche Standard-Minimum-Problem (1.14f.).

2. Ist $\tilde{w}$ eine zulässige Lösung eines Standard-Minimum-Problems und $\tilde{u}$ eine zulässige Lösung des zugehörigen dualen Standard-Maximum-Problems, so gilt
$$c^T \cdot \tilde{w} \geq b^T \cdot \tilde{u} \ .$$
$\tilde{w}$ und $\tilde{u}$ sind genau dann Optimallösungen, wenn in dieser Beziehung Gleichheit herrscht.

3. Das primale Standard-Minimum-Problem besitzt genau dann eine Optimallösung w^*, wenn für das duale Standard-Maximum-Problem eine Optimallösung u^* existiert. Gemäß oben sind dann beide Kriteriumswerte $c^T \cdot w^*$ und $b^T \cdot u^*$ gleich. $\square$

Bsp. 1.44 (Zur Dualität)

Bem. 1.45

Die Optimallösungen $u^*[1], \ldots, u^*[m]$ des dualen Standard-Minimum-Problems besitzt auch eine inhaltliche Interpretation. Sie werden als *Schattenpreise* oder *Opportunitätskosten* bezeichnet und geben an, um wie viel sich der Zielfunktionswert ändert, wenn sich die zugehörige Restriktion im primalen Programm um eine Einheit erhöht, sofern diese Änderung als klein angesehen werden kann.

e) Kanonische Form, Schlupfvariablen

Von Bedeutung sind insbesondere spezielle Standard-Minimum-Probleme und Standard-Maximum-Probleme, bei denen alle Restriktionen in Gestalt von Gleichungen vorliegen. Dies lässt sich stets dadurch erreichen, dass man wie in Definition 1.46 in jeder Nebenbedingung eine nichtnegative Hilfsvariable („*Schlupfvariable*") subtrahiert bzw. hinzuaddiert, die die Differenz zwischen beiden Seiten der Ungleichungen „auffängt". In die Zielfunktion gehen Schlupfvariablen nicht mit ein. Wichtig ist es, auf ihre Nichtnegativität zu achten, da sonst die ursprünglichen Restriktionen nicht mehr erfüllt sein müssen.

Def. 1.46 (Kanonische Form)

Gegeben sei das Standard-Minimum-Problem (1.14f.) in der Variablen w. Das Optimierungsproblem

$$c^T \cdot w \to \min \tag{1.22}$$

unter den Nebenbedingungen[3]

$$\begin{aligned} [A \quad -I_m] \cdot \begin{bmatrix} w \\ w_s \end{bmatrix} &= b && (1.23) \\ \underset{(n\times 1)}{w} &\geq \underset{(n\times 1)}{0} && (1.24) \\ \underset{(m\times 1)}{w_s} &\geq \underset{(m\times 1)}{0} && (1.25) \end{aligned}$$

[3]Dabei bezeichnet I_m für jedes $m \in \mathbb{N}$ die m-dimensionale Einheitsmatrix.

heißt *(zugehöriges) Standard-Minimum-Problem in kanonischer Form (in der (Haupt)Variablen* w *mit der Schlupfvariablen* $w_s = (w_s[1], ..., w_s[m])^T$*).*

Analog heißt für das Standard-Maximum-Problem (1.16f.) in der Variablen w das Optimierungsproblem

$$c^T \cdot w \to \max \tag{1.26}$$

unter den Nebenbedingungen

$$[A \;\; I_m] \cdot \begin{bmatrix} w \\ w_s \end{bmatrix} = b \tag{1.27}$$

$$\underset{(n \times 1)}{w} \geq \underset{(n \times 1)}{0} \tag{1.28}$$

$$\underset{(m \times 1)}{w_s} \geq \underset{(m \times 1)}{0} \tag{1.29}$$

(zugehöriges) Standard-Maximum-Problem in kanonischer Form (in der (Haupt-)Variablen w *mit der Schlupfvariablen* $w_s = (w_s[1], ..., w_s[m])^T$*).* $\square$

Offensichtlich besteht folgender Zusammenhang zwischen den Lösungen eines Standard-Minimum- bzw. eines Standard-Maximum-Problems und den Lösungen des zugehörigen Problems in kanonischer Form:

Bem. 1.48 Lösungen bei kanonischer Form und ursprünglicher Form

Betrachtet man ein Standard-Minimum-Problem gemäß (1.14f.) bzw. ein Standard-Maximum-Problem laut (1.16f.) sowie die in (1.22ff.) und (1.26ff.) beschriebenen zugehörigen Standard-Minimum-Probleme bzw. Standard-Maximum-Probleme in kanonischer Form. Dann gilt:

1. Ist $(\bar{w}[1], ..., \bar{w}[n], \bar{w}_s[1], ..., \bar{w}_s[m])^T$ zulässig (resp. eine Optimallösung) für das Problem in kanonischer Form gemäß (1.22ff.) bzw. (1.26ff.), so ist $(\bar{w}[1], ..., \bar{w}[n])^T$ zulässig (resp. eine Optimallösung) für das entsprechende Problem (1.14f.) bzw. (1.16f.).

2. Umgekehrt gibt es zu jeder zulässigen (resp. optimalen) Lösung $(\bar{w}[1], ..., \bar{w}[n])^T$ des Problems (1.14f.) bzw. (1.16f.) eine zulässige (resp. optimale) Lösung $(\bar{w}[1], ..., \bar{w}[n], \bar{w}_s[1], ..., \bar{w}_s[m])^T$ des zugehörigen Problems in kanonischer Form laut (1.22ff.) bzw. (1.26ff.). $\square$

Die Menge der Projektionen der Extremalpunkte des zulässigen Bereichs des kanonischen Problems auf die Hauptvariablen bildet eine Obermenge der Extremalpunkmenge des zulässigen Bereichs des Problems in Standardform; die beiden Mengen sind im Allgemeinen nicht notwendig gleich. Man kann also in Bemerkung 1.48 nicht „zulässig“ durch „Extremalpunkt“ ersetzen.
Der praktische Nutzen der Verwendung von Schlupfvariablen liegt darin,

dass man durch sie erkennen kann, bei welchen Restriktionen noch „Spiel ist“, d.h. welche Kapazitätsbeschränkungen nicht zur Gänze ausgeschöpft werden.

f) Dualität II: Der Satz vom komplementären Schlupf

Vom theoretischen Blickwinkel ist vor allem der Satz vom komplementären Schlupf (s.u.) von Bedeutung. Wendet man zu seiner Vorbereitung die Dualitätsbetrachtungen aus Definition 1.42 auf Standard-Minimum- bzw. Standard-Maximum-Probleme in kanonischer Form an, so erhält man:

Bem. 1.49 Duale Programme bei Programmen in kanonischer Form

Ist ein Standard-Minimum-Problem in kanonischer Form der in (1.22ff.) beschriebenen Gestalt gegeben, so lautet das zugehörige duale Standard-Maximum-Problem in kanonischer Form:

$$b^T \cdot u \to \max \tag{1.30}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A^T & I_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ u_r \end{bmatrix} &= c && (1.31) \\ \underset{(m\times 1)}{u} &\geq \underset{(m\times 1)}{0} && (1.32) \\ \underset{(n\times 1)}{u_r} &\geq \underset{(n\times 1)}{0}\,. && (1.33) \end{aligned}$$

Entsprechend lautet das zu einem Standard-Maximum-Problem in kanonischer Form (vgl. 1.26ff.) gehörende duale Standard-Minimum-Problem in kanonischer Form:

$$b^T \cdot u \to \min \tag{1.34}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} A^T & -I_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ u_r \end{bmatrix} &= c && (1.35)\\
\underset{(m\times 1)}{u} &\geq \underset{(m\times 1)}{0} && (1.36)\\
\underset{(n\times 1)}{u_r} &\geq \underset{(n\times 1)}{0} \; . && (1.37)
\end{aligned}$$

$\square$

Exkurs:
Auf einen weiteren Gesichtspunkt der Dualität weisen etwa Koop und Moock (2008, S. 81) hin:
Betrachtet man das Standard-Minimum-Problem in kanonischer Form

$$c_1 \cdot w[1] + c_2 w[2] + \ldots + c_n w[n] \to \min$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{c} a_{11} \cdot w[1] + a_{12} w[2] + \ \ldots \ a_{1n} w[n] + w_s[1] = b_1 \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1} \cdot w[1] + a_{m2} w[2] + \ \ldots \ a_{mn} w[n] + w_s[m] = b_m \end{array}$$

und sucht eine untere Schranke in den $w[i]$, so könnte man versuchen, diese aus den Nebenbedingungen zu „basteln“, indem man die i-te Zeile, $i = 1, \ldots, m$, mit $\lambda_i \geq 0$ multipliziert und allen Zeilen addiert, wobei die einzelnen Summanden bereits Spaltenweise zusammengefasst werden. Man erhält

$$\begin{aligned} g(\lambda) = \sum \; & \lambda_1(a_{11} + \ldots + a_{m1})w[1]+ \\ & \lambda_2(a_{12} + \ldots + a_{m2})w[2]+ \\ & \ldots + \\ & \lambda_m(a_{1n} + \ldots + \lambda_{mn})w[n]+ \end{aligned}$$

Dies ist eine untere Schranke, sofern jeweils der i-te Koeffizient von $w[i]$ kleiner oder gleich c_i, dem i-ten Koeffizenten von $w[i]$ in der ursprünglichen Zielfunktion, ist; also gilt:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ji} \leq c_i \quad \text{für alle } i. \tag{1.38}$$

Die größte dieser unteren Schranken erhält man, indem man $g(\lambda)$ maximiert. Nach Konstruktion ist $g(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$, und man erhält das

Optimierungsproblem

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \lambda_i \;\rightarrow\; \max$$

unter den in (1.38) beschriebenen Restriktionen und der zusätzlichen, oben verwendeten Bedingung $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$. Dies führt genau, nach dem Einführen geeigneter Schlupfvariablen, auf das entsprechende duale Standard-Maximum-Problem in kanonischer Form.

Natürlich behalten die Dualitätsergebnisse aus Proposition 1.43 ihre Gültigkeit. Darüber hinaus lässt sich jedoch ein fundamentaler Zusammenhang zwischen den Optimallösungen eines Problems und den Schlupfvariablen des zugehörigen dualen Problems herleiten. Es kann nämlich aus der Existenz von echt von Null verschiedenen Komponenten einer Optimallösung auf das Verschwinden der entsprechenden Haupt- bzw. Schlupfvariablen in *allen* Optimallösungen des zugehörigen Dual-Problems geschlossen werden. Auch ist es möglich, zulässige Lösungen aufgrund ihres Schlupfes unter Umständen als optimal zu charakterisieren:

Proposition 1.50 (Der Satz vom komplementären Schlupf)

Betrachtet werde ein Standard-Minimum-Problem bzw. ein Standard-Maximum-Problem in kanonischer Form gemäß (1.22ff.) bzw. (1.26ff.) und das zugehörige duale Problem in kanonischer Form, wie in (1.30ff.) bzw. (1.34ff.) beschrieben. Dann gilt:

1. Ist $\left(\tilde{w}^T, \tilde{w}_s^T\right)^T$ eine zulässige Lösung des primalen Problems und $\left(\tilde{u}^T, \tilde{u}_r^T\right)^T$ eine zulässige Lösung des zugehörigen dualen Problems, so sind beide genau dann optimal, wenn gilt

$$\tilde{w}^T \cdot \tilde{u}_r + \tilde{w}_s^T \cdot \tilde{u} = 0 \ . \tag{1.39}$$

2. Insbesondere ergibt sich damit für alle $j = 1, \ldots, m$:

a) Gibt es eine Optimallösung

$$(w^*[1], ..., w^*[n], w_s^*[1], ..., w_s^*[m])^T$$

für das primale Problem mit

$$w_s^*[j] > 0 \ ,$$

so ist

$$u^*[j] = 0$$

für alle Optimallösungen

$$(u^*[1], ..., u^*[m], u_r^*[1], ..., u_r^*[n])^T$$

des zugehörigen Dualproblems.

b) Gibt es eine Optimallösung

$$(u^*[1], ..., u^*[m], u_r^*[1], ..., u_r^*[n])^T$$

des Dualproblems mit

$$u^*[j] > 0 \ ,$$

so ist

$$w_s^*[j] = 0$$

für alle Optimallösungen

$$(w^*[1], ..., w^*[n], w_s^*[1], ..., w_s^*[m])^T$$

des primalen Problems. $\square$

g) Erweiterungen

Es gibt eine Reihe wichtiger Erweiterungen:

- nichtlineare Zielfunktionen
  Hier gibt es eine Reihe von leistungsfähigen Algorithmen. Ist die Zielfunktion der Quotient zweier linearer Funktionen, so lässt sich eine geeignete Verallgemeinerung von Satz 1.19 und damit auch des Simplex-Algorithmus finden („*Quotientenoptimierung*“).

  Bei allgemeinen Zielfunktionen wird das Extremum nicht notwendig in einem Extremalpunkt angenommen.

Betrachtet man beispielsweise (Varianz der Bernoulli-Verteilung)

$$\begin{aligned} p(1-p) &\rightarrow \max \\ p &\geq 0 \\ -p &\geq -1, \end{aligned}$$

so liegt die Optimallösung p^* bei $\frac{1}{2}$.
Dennoch lassen sich quadratische Optimierungprobleme mit einem Simplex-ähnlichen Verfahren lösen (etwa: Büning et. al., 2000, Kap. 8.9).

- *Parametrische Optimierung*:
  Die Zielfunktion und/oder Restriktionen hängen von einem Parameter ab:
  (Wichtig z.B. für Sensitivitätsanalysen) Auch hier sind Varianten z.B. des Simplex-Verfahren möglich.

- *Ganzzahlige Optimierung*
  Sind die Lösungen inhaltlich zwingend ganzzahlig (z.B. die Aufteilung von wenigen unteilbaren Ressourcen), so ist eine eigenständige Betrachtung nötig.
  Ein besonderer Spezialfall ist die *Boolesche Optimierung*, bei der nur $0, 1$-Variablen zugelassen sind.